

De Arithmetica

Prefationes

Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius

Praefatio Editoris

Decem fere abhinc annos et scriptores latinos cogniturus et rei mathematicae studiosus Boetio coepi operam dare nec multo post acrius in mathematica inprimis eius opera incumbendi auctor fuit mihi Halmius, ad accuratius cognoscendam linguam latinam hinc quoque aliquantulum afferri posse ratus. Prius tamen rebus arithmeticus utilem fructum afferre me posse putavi, quaeque inveneram publici iuribus feci libello de Boetii geometria edito. [1] Opiniones meas aggressus est vir doctissimus Mauritius Cantor [2] meque inpulit, ut, quae minus recte de Boetii arte ratiocinandi et computandi statuerat, refellere conarer argmentis quam maxime certis. [3] Pauca etiam de geometria Boetii protuli, [4] quibus a Boetio eam profectam non esse comprobarem.

Haec agentem interrogavit me Halmius velleme labores suscipere necessarios ad opera Boetii mathematica edenda, nec volentem tantum provocavit sed etiam libris manu scriptis quibus optimis potuit ad me missis simul adiuvit. Usus sum igitur codicibus Monachii asservatis praestantissimis, quibus accesserunt codices Bambergenses non minoris notae et liber Erlangensis, quem alter tantum codex Carnutensis aequat. Cuius rei gratiae mihi agenda sunt maximae et Halmio ipsi et viris humanissimis et benevolentissimis Foeringer, Thmoas Monacensis, Stenglein Bambergensi, Autenrieth Erlangensi. Egregiam operam navavit mihi princeps Boncompagni, cuius summa liberalitate summa mea laude digna factum est, ut non solum, quae ipse in libris suis manu scriptis habuit, quae in aliis codicibus Romanis inventa sunt, quantum opus esse visum est, in meum usum possem convertere, sed etiam de codicibus, qui Neapoli, Florentiae, Veronae custodiuntur, fierem certior.

Ita instructus rem aggredi ausus sum parum fortasse versans quid valerent humeri. Sed occasionem vires intendendi omittere nolui. Iam perfeci quae perficere mihi proposui. Utrumque Boetii opus et quod de arithmetica et quod de musica composuit, novissime apud nos anno 1470 Basilea editum, tribus paene saeculis post rursus profero adiecto geometriae opusculo. De quibus pauca haec videntur monenda.

Inscriptionem alterius operis Boetii sumpsi ex capite quarto libri I. de inst. mus. (p. 192, v. 19): *in libris, quos de arithmetica institutione conscripsimus*, inde titulum quoque petitum esse veri simile est, qui legitur in codice Bamb. HI. N. 13 (d) ante titulum indicium libri II de inst. arithm. (p. 72, v. 9 var. lect.). Nec obstare mihi videtur, quod Boetius in cap. quadragesimo libri II inst. arithm. (p. 137, v. 7) arithmeticae introductionem se terminare dicit. Alterius operis inscriptionem manifestam reddi putavi cum capite decimo libri III de inst. mus. (p. 283, v. 9): *id, quod institutione musicae adorsi sumus*, tum capite sextodecimo eiusdem libri III (p. 300, v. 2): *quod superest musicae institutioni* et capite septimo libri V (p. 358, v. 2): *quae secundo huius institutionis libro digessimus* et infra (v. 9) *ex secundo huius institutionis musicae libro et quarto ptendum est*. Hinc eius opera, qui titulos finxit et indices eorum composuit, formula (e.g. p. 255, v. 16) *de musica id est armonica institutione liber* orta videtur. Eorum liberorum, quos Boetius de geometria scripsisse dicitur, investigare veram inscriptionem nihil aliud esset nisi operam et tempus perdere. Iam inter homines doctos constat, eos libros minime Boetio tribuendos esse, quos codices manu scripti non pauci praeter duos illos praebent, qui in

praestantissimis codicibus Erlangensi et Carnutensi reperiuntur.[5] Nec ipsos hos duos libros a Boetio compositos esse ego quidem contendo repugnante inprimis Cantore. Sub iudice adhuc lis est, quam tamen statim, si legi posset, dirimeret codex Veronensis palimpsestus 38, in quo verum Boetium latere putat Blume.[6] Humanissime et liberalissime Boncompagni, illustris ille rerum mathematicarum fautor effecit, ut codex ille diligentissime inspiceretur, sed aedo difficilis lectu inventus est, ut prater admodum pauca verba nihil transcribi ex eo posset. Donec igitur aut aciores oculi, quod vix erediderim, aut instructor ars, quod fieri posse nemo negaverit, in communem usum protulerin, quae Blume investigavit, nihil aliud restat, nisi ut ea, quae fertur Boetii geometria, edatur, quam artem geometricam auctorem nominasse testantur loci, quos in pag. 434 sub voce *ars* attuli. Quae cum per se nullius fere pretii sit, maximi momenti ad res arithemticas facta est antiquissimis, quae quantum scimus in nostris litteris exstant, vestigiis eorum signorum, quibus nunc numeros describimus. Itaque omnem impendi operam, ut Carnutensi quoque codice ipse uti possem, neque tamen fieri potuit, cum legibus nolideret, codicem illum ex Francogallia ad me mitti.

De libris manu scriptis, quibus usus sum, notarum explicationes singulis operibus addidi. Quam maxime studui, ut non solum veri Boetii scripta sed etiam veram scribendi formam ederem. Omittendi igitur erant cautum tituli, quos Boetium scripsisse minime est verisimile. Quum tamen faciliorem operum conspectum, praebeant, minoribus litteris edendoscensui. In vocabulorum scriptura si cui parum sibi constare videatur, quod *supponenda et obtinet, impar et comparare, adsumo et aspicere*, alia huius modi typis invenerit edita, is meminerit codices me secutum esse hac in re maxime varios nec nisi magis veri similia assequi potuisse.[7] Uni tantum *spatio* invitis paene codicibus *t* litteram servaviv reiecta *c*, quae saepissime occurit. In graces nominibus propris graecam scribendi rationem sequi malui, ex qua et ipsa Ptolomaeus viditur scribendum. Geometriae libros, cum posteriori tempori attribuendi mihi videantur, si qua in re a ceteris Boetii libris distabant, non mutavi. Et haut scio an in ipsius Boetii operibus corrigendis constantior esse studuerim Boetio ipso, cum variationem rerum illum amasse non solum easdem sententias eloquendi maxima varietas testetur, sed etiam quod promiscue scripsisse eum maxime et verisimile triangulus et triangulum, pyramidam et pyramidem, atomon latinis, κολουρον graecis litteris, similia. Uncius inclusi quae in pag. 375 verss. 1.2.18.19 leguntur, nec me fugit includi etiam alia posse, velut pag 383 vv. 5-21, pag 387 v. 23 et pag. 388 vv. 1.2. Sed magis sunt vitiosa illa loca, quam ut uncus sanari possint. In pag. 401 v. 10 post *longitudine* lacuna statuenda est Intercidit enim scamni definitio. Haec tamen et alia alias fortasse explicabo. Nunc operam navare Boetii opera cognituris equidem volui, quantam navaverim, iudices videant benevoli.

Scrib. Onoldi m Maio ad. MDCCCLXVII.

GODFREDUS FRIEDLEIN

[1] Gerbert, Die Geometri des Boethius und die indischen Ziffern. Erlangen, Blaesing 1861.

[2] Mathematische Beitrage zum Kulturleben der Voelker, Halle, Schmidt 1863.

[3] *Zeitschrift fuer Mathematik und Physik*, IX, S. 73-95, 145-171, 297-330. X, S. 241-282

[4] *Neue Jahrbuecher fuer Philologie und Paedagogik*. 1863. S. 425-427

[5] Cantor, *Mathem. Beitrage*. S. 196 - 197.

[6] *Erlaenterungen zu den Schriften der roem. Feldmesser*. S. 65, Anm. 114.

[7] Vel idem vocabulum eisdem litteris ubique ut redderem quam maxime cum intentus essem, tamen ne oculos laterent aliquot menda inpedire nequivi. Nonnulla etiam mutata novis argumentis sententia variavit. Quae ut secundum scripturam in indice adhibitam emendata habeantur peto.

DOMINO SUO PATRICIO SYMMACHO BOETIUS

In dandis accipiendisque muneribus ita recte officia inter eos praecipue, qui sese magni faciunt, aestimantur, si liquido constabit, nec ab hoc aliud, quod liberalius afferret, inventum, nec ab illo unquam, quod iucundius benevolentia complecteretur, acceptum. Haec ipse considerans attuli non ignava opum pondera, quibus ad facinus nihil instructius, cum habendi sitis incanduit, ad meritum nihil vilius, cum ea sibi victor animus calcata subiecit, sed ea, quae ex Graecarum opulentia litterarum in Romanae orationis thesaurum sumpta conveximus. Ita enim mei quoque mihi operis ratio constabit, si, quae ex sapientiae doctrinis elicui, sapientissimi iudicio conprobentur. Vides igitur, ut tam magni laboris effectus tuum tantum spectet examen, nec in aures prodire publicas, nisi doctae sententiae adstipulatione nitatur. In quo nihil mirum videri debet, cum id opus, quod sapientiae inventa persequitur, non auctoris sed alieno incumbit arbitrio; suis quippe instrumentis res rationis expenditur, cum iudicium cogitur subire prudentis. Sed huic munusculo non eadem quae ceteris imminent artibus munimenta constituo, neque enim fere ulla sic cunctis absoluta partibus nullius indiga suis tantum est scientia nixa praesidiis, ut non ceterarum quoque artium adiumenta desideret. Nam in effigiandis marmore staturus alius excidendae molis labor est, alia formandae imaginis ratio, nec eiusdem artificis manus politici operis nitor exspectat. At picturae manibus tabula commissa fabrorum: cerae rustica observatione decerptae, colorum fuci mercatorum sollertia perquisiti, lintea operosis elaborata textrinis multiplicem materiam praestant. Nonne idem quoque in bellorum visitur instrumentis? Hic spicula sagittis exacuit, illi validus torax nigra gemit incude, ast alius crudi umbonis tegmina proprii laboris orbi infigenda mercatur. Tam multis artibus ars una perficitur. At nostri laboris absolutio longe ad faciliorem currit eventum. Tu enim solus manum supremo operi inpones, in quo nihil de decernentium necesse est laborare consensu. Quamlibet enim hoc iudicium multis artibus probetur excultum, uno tamen cumulatur examine.

Experiare igitur licet, quantum nobis in hoc studio longis tractus otii labor adiecerit, an rerum subtilium fugas exercitatae mentis velocitas comprehendat, utrum ieiunae macies orationis ad ea, quae sunt caligantibus impedita sententiis expedienda sufficiat. Qua in re mihi alieni quoque iudicii lucra quaeruntur, cum tu utrarumque peritissimus litterarum posis Graecae orationis expertibus quantum de nobis iudicare audeant, sola tantum pronuntiatione praescribere. At non alterius obnoxius institutis artissima memet ipse translationis lege constringo, sed paululum liberius evagatus alieno itineri, non vestigiis, insisto. Nam et ea, quae de numeris a Nichomacho diffusius disputata sunt, moderata brevitate collegi et quae transcurra velocius angustiore intellegentiae praestabant aditum mediocri adiectione reseravi, ut aliquando ad evidentiam rerum nostris etiam formulis ac descriptionibus uteremur. Quod nobis quantis vigiliis ac sudore constiterit, facile sobrius lector agnoscet. Cum igitur quattuor matheseos disciplinarum de arithmetica, quae est prima, perscriberem, tu tantum dignus eo munere videbare, eoque magis inerrato opus esse intellegebam. Nam etsi apud te facilius veniae locus esset, aliquando tamen ipsam formidabat facilitatem suspecta securitas. Aribtrabar enim nihil tantae reverentiae oblatum iri oportere, quod non elaboratum ingenio, perfectum studio, dignum postremo tanto otio videretur. Non igitur ambigo, quin pro tua in me benevolentia supervacua reseces, hiantia suppleas, errata reprehendas, commode dicta mira animi alacritate suscipias. Quae res inpulit pigram consilii moram. Nimios enim mihi fructus placitura restituent. Novi quippe, quanto studiosius nostra quam ceterorum bona diligamus. Recte ergo, quasi aureos Cereri culmos et maturos Baccho palmites, sic ad te novi operis rudimenta transmisi. Tu tantum paterna gratia nostrum provehas munus. Ita et laboris mei primitias doctissimo iudicio consecrabis et non maiore censebitur auctor merito quam probator.

Proemium, in quo divisio mathematicae.

Inter omnes priscae auctoritatis viros, qui Pythagora duce puriore mentis ratione vigerunt, constare manifestum est, haude quemquam in philosophiae disciplinis ad cumulum perfectionis evadere, nisi cui talis prudentiae nobilitas quodam quasi quadruvio vestigatur, quod recte intuentis sollertiam non latebit. Est enim sapientia rerum, quae sunt suique inmutabilem substantiam sortiuntur, comprehensio veritatis. esse autem illa dicimus, auge nec intentione crescunt nec retractione minuuntur nec variationibus permutantur, sed in propria semper vi suae se naturae subsidiis nixa custodiunt. Hae autem sunt qualitates, quantitates, formae, magnitudines, parvitates, aequalitates, habitudines, actus, dispositiones, loca, tempora et quicquid adunatum quodammodo corporibus invenitur, quae ipsa quidem natura incorporea sunt et inmutabili substantiae ratione vigentia, participatione vero corporis permutantur et tactu variabilis rei in vertibilem inconstantiam transeunt. Haec igitur quoniam, ut dictum est, natura inmutabilem substantiam vimque sortita sunt, vere proprieque esse dicuntur. Horum igitur, id est, quae sunt proprie quaeque suo nomine essentiae nominantur, scientiam sapientia profitetur. Essentiae autem geminae partes sunt, una continua et suis partibus iuncta nec ullis finibus distributa, ut est arbor lapis et omnia mundi huius corpora, quae proprie magnitudines appellantur. Alia vero disiuncta a se et determinata partibus et quasi acervatim in unum redacta concilium, ut grex populus chorus acervus et quicquid, quorum partes propriis extremitatibus terminantur et ab alterius fine discretae sunt. His proprium nomen est multitudo. Rursus multitudinis alia sunt per se, ut tres vel quattuor vel tetragonus vel quilibet numerus, qui ut sit nullo indiget. Alia vero per se ipsa non constant, sed ad quiddam aliud referuntur, ut duplum, ut dimidium, ut sesquialterum vel sesquitergium et quicquid tale est, quod, nisi relatum sit ad aliud, ipsum esse non possit. Magnitudinis vero aliam sunt manentia motuque carentia, alia vero, quae mobili semper rotatione vertuntur nec ullis temporibus adquiescunt. Horum ergo illam multitudinem, quae per se est, arithmetica speculatur integritas, illam vero, quae ad aliquid, musici modulaminis temperamenta pernoscent, immobilis vero scientiam astronomicae disciplinae peritia vendicat. Quibus quattuor partibus si careat inquisitor, verum invenire non possit, ac sine hac quidem speculatione veritatis nulli recte sapiendum est. Est enim sapientia earum rerum, quae vere sunt, cognitio et integra comprehensio. Quod haec qui spernit id est has semitas sapientiae ei denuntio non recte esse philosophandum, siquidem philosophia est amor sapientiae, quam in his spernendis ante contempserit. illud quoque addendum arbitror, quod cuncta vis multitudinis ab uno progressa termino ad infinita progressionis augmenta concrevit. Magnitudo vero a finita inchoans quantitate modum in divisione non recipit; infinitissimas enim sui corporis suscipit sectiones. Hanc igitur naturae infinitatem indeterminantemque potentiam philosophia sponte repudiat. Nihil enim, quod infinitum est, vel scientia potest colligi vel mente comprehendi, sed hinc sumpsit sibi ipsa ratio, in quibus possit indagatricem veritatis exercere sollertiam. delegit enim de infinitae multitudinis pluralitate finitae terminum quantitatis et interminabilis magnitudinis sectione reiecta definita sibi ad cognitionem spatia seposcit. Constat igitur, quisquis hae pretermiserit, omnem philosophiae perdidisse doctrinam. Hoc igitur illud quadruvium est, quo his viandum sit, quibus excellentior animus a nobiscum procreatis sensibus ad intelligentiae certiora perducitur. Sunt enim quoniam gradus certaeque progressionum dimensiones, quibus ascendi progredi que possit, ut animi ille oculus, qui, ut ait Plato, multis oculis corporalibus salvari constituitur sit dignior, quod eo solo lumine vestigari vel inspicere veritas queat, hunc inquam oculum demersum orbatumque corporeis sensibus hae disciplinae rursus inluminent. Quae igitur ex hisce prima discenda est nisi ea, quae principium matrisque quodammodo ad ceteras obtinet portionem? Haec est autem arithmetica. Haec enim cunctus prior est, non modo quod hanc ille huius mundanae molis conditor deus primam suae habuit ratiocinationis exemplar et ad hanc cuncta constituit, quaecunque fabricante ratione per numeros assignati ordinis invenere concordiam, sed hoc quoque prior arithmetica declaratur, quod, quaecunque natura priora sunt, his sublatis simul posteriora tolluntur; quod si posteriora pereant, nihil de statu prioris substantiae permutatur, ut animal prius est homine. Nam si tollas animal, statim quoque hominis natura delat sit, si hominem sustuleris, animal non peribit. Et e contrario ea semper posteriora sunt, quae secum aliud quodlibet inferunt, ea priora, quae cum dicta sunt, nihil secum de posterioribus trahunt, ut in eodem quoque homine. Nam si hominem dixeris, simul quoque animal nominabis, idem est enim homo, quod animal; si animal dixeris, non speciem simul hominis intulisti, non est enim idem animal, quod homo. Hoc idem in geometria vel arithmetica videtur incurrere. Si enim numeros tollas, unde triangulum vel quadratum vel quicquid in geometria veratur, quae omnia numerorum denominativa sunt? At vero si quadratum triangulumque sustuleris omnisque geometria consumpta sit, tres et quattuor aliorumque numerorum vocabula non perhibent. Rursus cum aliquam geometricam formam dixeris, est illi simul numerorum nomen implicitum; cum numeros dixeris, nondum ullam formam geometricam nominavi. Musica vero quam prior sit numerorum vis, hinc maxime probari potest, quod non modo illa natura priora sunt, quae per se constant, quam illa, quae ad aliquid referuntur. Sed etiam ea ipsa musica modulatio numerorum nominibus adnotatur, et idem in hac evenire potest, quod in geometria praedictum

est. Diatessaron enim et diapente et diapason ab antecedentis numeri nominibus nuncupantur. Ipsorum quoque sonorum adversus se proportio solis neque aliis numeris invenitur. Qui enim sonus in diapason symphonia esset, idem duplicis numeri proportione colligitur; quae diatessaron est modulatio, epitrita conlatione componitur; quam diapente dymphoniam vocant, hemiola medietate coniungitur; qui in numeris epogdous est, idem tonus in musica, et ne singula persequi laborem, huius operis sequentia, quanto prior sit arithmetica sine ulla dupitatione monstrabit. Sphericam vero atque astronomicam tanto praecedat, quanto due reliquae disciplinae hanc tertiam natura praecedunt. In astronomia enim circuli, sphaera, centrum, parallelique circuli mediusque axis est, quae omnia geometricae disciplinae curae sunt. Quare est etiam ex hoc ostendere seniores geometriae vim, quod omnis motus est post quietem et natura semper statio prior est, mobilium vero astronomia, immobilium geometria doctrina est; vel quod armonicis modulationibus motus ipse celebratur astrorum. Quare constat quoque musicae vim astrorum curus antiquitate praecedere, quam superare natura arithmeticae dubiam non est, cum prioribus, quam illa aest, videatur antiquior. Proprie tamen ipsa numerorum natura omnis astrorum cursus omnisque astronomica ratio constituta est. Sic enim ortus occasusque colligimus, sic tartitates velocitatesque errantium siderum custodimus, sic defectus et multiplices lunae variationes agnoscimus. Quare, quoniam prior, ut claruit, arithmeticae vis est, hinc disputationis sumamus exordium.

De substantia numeri

Omnia quaecumque a primaeva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur ratione formata. Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplar. Hinc enim quattuor elementorum multitudo mutuata est, hinc temporum vices, hinc motus astrorum caelicque conversio. Quae cum ita sint, cumque omnium status numerorum colligatione fungatur, eum quoque numerum necesse est in propria semper sese habentem aequaliter substantia permanere, eumque compositum non ex diversis -- quid enim numeri substantiam conungeret, cum ipsius exemplum cuncta iunxisset? -- sed ex se imposito videtur esse compositus. Porro autem inhi ex similibus componi videtur, nec ex his, quae nulla rationis proportione iunguntur et a se omni substantia naturaque discreta sunt. Constat ergo, quoniam coniunctus est numerus, neque ex similibus esse coniunctum neque ex his, quae ad se invicem nulla ratione proportionis haerent. Erunt ergo, numeros prima quae unguant, ad substantiam quidem auae consent semperque permaneant. Neque enim ex non substantibus effici quicquam potest et sunt ipsa dissimilia et potentia componendi. Hae autem sunt, quibus numerus constat, par atque impar quae divina, quadam potentia, cum disparia sint contrariaque, ex una tamen genitura profluunt, et in unam compositionem modulationemque iunguntur.

Definitio et divisio numeri et definitio paris et imparis.

Et primum quid sit numerus definendum est. Numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus. Huius igitur prima divisio est in inparem atque parem. Et par quidem est, qui potest in aequalia dividet eo, quod in medio praedictus unus intercedat. Et haec quidem huiusmodi definitio vulgaris et nota est.

Definitio numeri paris et imparis secundum Pythagoram.

Illa autem secundum pythagoricam disciplinam talis est: par numerus est, qui sub eadem divisione potest in maxima parvissimaque dividi, maxima spatio, parvissima quantitate secundum duorum istorum generum contrarias passiones. Impar vero numerus est, cui hoc quidem accidere non potest, sed cuius in duas inaequales summas naturalis est sectio. Hoc est autem exemplar: ut si quilibet datus par numerus dividatur, maior quidem quantum ad divisionis spatia non invenietur, quam disgregata medietas, quantitate vero nulla minor est, quam in gemina facta partitio; ut, si par numerus, qui est viij, dividatur in iiij atque alios iiij, nulla erit alia divisio, quae maiores partes efficiat; porro autem nulla erit alia divisio, quae solum numerum minore dividat quantitate. In duas enim partes divisione nihil minus est. Cum enim totum quis fuerit trina divisione partitus, spatii quidem summa minuitur, sed numerus divisionis augetur. Quod autem dictum est: secundum duorum generum contrarias passiones, huiusmodi est: prae docuimus enim quantitatem in infinitas pluralitates ad crescere, spatia vero, id est magnitudines in infinitissimas minui parvitatibus atque ideo hic contra eventum. Haec namque paris divisio spatio est maxima, parvissima quantitate.

Alia secundum antiquiorem modum divisio paris et imparis

Secundum antiquiorem vero modum alia est paris numeri definitio. Par numerus est, qui in duo aequalia et in duo inaequalia partitionem recipit, sed ut in neutra divisione vel in paritati paritas vel paritati inparitas misceatur, praeter solum paritatis principem, binarium numerum, qui in aequalem non recipit sectionem, propterea quod ex duabus unitatibus constat et ex prima duorum quoddammodo paritate. Quod autem dico, tale est: si enim ponatur par numerus, potest in duo aequalia dividi, ut denarius dividitur in quinos, porro autem et per inaequalia, ut idem denarius in iij et vij, sed hoc modo, ut cum una pars fuerit divisionis par, alia quoque par inveniatur, et si una inpar, reliqua ab eius inparitate non discrepet, ut in eodem numero, qui est denarius. Cum enim divisus est in quinos, vel cum in tres septem, utraeque in utraque portione partes in pares extiterunt. Si autem ipse, vel alius numerus par, dividatur in aequales, ut octonarius in iiiij et iiiij, et item per inaequales, ut idem octonarius in v et iij, in illa quidem divisione utraeque partes pares factae sunt, in hac utraque in pares extiterunt; neque unquam fieri potest, ut, cum una pars divisionis par fuerit, alia inpar inveniri queat, aut, cum una inpar sit, alia par possit intellegi. Inpar vero numerus est, qui ad quamlibet illam divisionem per inaequalia semper dividitur, ut utrasque species numeri semper ostendat, nec unquam altera sine altera sit, sed una pars paritati, inparitati alia deputetur, ut, vij si dividatur in iij atque iij, altera portio par altera inpar est. et hoc idem in cunctis inparibus numeris invenitur, neque unquam in inparis divisione praeter se esse possunt. Hae geminae species, quae naturaliter vim numeri substantiamque componunt.

Definitio paris et inparis per alterutrum

Quod si haec etiam per alterutras species definienda sunt, dicetur inparem numerum esse, qui unitate differt a pari vel cremento vel deminutione. Par item numerus est, qui unitate differt ab inpari vel cremento vel deminutione. Si enim pari unum dempseris, vel unum adieceris, inpar efficitur, vel si inpari idem feceris, par continuo procreatur.

De principalitate unitatis

Omnis quoque numerus circum se positorum et naturali sibimet dispositione iunctorum medietas est; et qui super duos illos sunt, qui medio iunguntur, si componantur, etiam ipsorum supradictus numerus media portio est; et rursus illorum, qui sunt super secundo loco iunctos, cum ipsi quoque sint compositi, prior his numerus medietatis loco est, et hoc erit, usquidem occurrens unitas terminum ponat, ut si ponat quis quinarium numerum, altrinsecus circa ipsum sunt sumper iiiij inferius vi. Hi ergo si uncat sint, faciunt x, quorum v numerus medietas est. Qui autem circa ipsos id est circa vi et iiiij sunt, iij silicet et vij, idem is iuncti sint, eorum quinarium numerus medietas est; rursus istorum, qui altrinsecus positi sunt, si iungantur, etiam hi quinarium numeri dupli sunt; nam super iij sunt ii, super vij sunt viij; hi ergo si iuncti sint, faciunt x, quorum quinarium rursus medietas est. Hoc idem in omnibus numeris evenit, usquedum ad unitatis terminum perveniri queat; sola enim unitas circum se duos terminos non habet, atque ideo eius, qui est prope se, solius est medietas. Nam iuxta i solus est binarius naturaliter constitutus, cuius unitas media pars est. Quare constat primam esse unitatem cunctorum, qui sunt in naturali dispositione, numerorum et eam rite totius quamvis prolixae gentricem pluralitatis agnosci.

Divisio paris numeri

Paris autem numeri species sunt tres. est enim una, quae dicitur pariter par, alia vero pariter inpar, tertia inpariter par. Et contraria quidem locumque obtinentia summitatum videntur esse pariter par et pariter inpar. Medietas autem quaedam, quae utrorumque participat, est numerus, qui vocatur inpariter par.

De numero pariter pari eiusque proprietatibus.

Pariter par numerus est, qui potest in duo paria dividi, eiusque pars in alia duo paria partisque pars in alia duo paria, ut hoc totiens fiat, usquedum divisio partium ad indivisibilem naturaliter perveniat unitatem. Ut lxiiiij numerus habet medietatem xxxij, hic autem medietatem xvi, hic vero viij. Hunc quoque quaternarius in aequa partitur, qui binarii duplus est; sed binarius unitatis medietate dividitur, quae unitas naturaliter singularis non recipit sectionem. Huic numero videtur accidere, ut quaecunque eius fuerit pars, cum nomine ipso vocabuloque pariter par inveniatur; tum etiam quantitate. Sed ideo mihi videtur hic numerus pariter par vocatus,

j

ij

iiij

j ij iiij j ij iiij iiiij

j

ij

iiij

iiiiij

quod eius omnes partes et nomine et quantitate pares pariter inveniantur. Quomodo autem et nomine et quantitate pares pariter inveniantur. Quomodo autem et nomine et quantitate pares habeat partes hic numerus, post dicemus. Horum autem generatio talis est: ab uno enim quoscunque in duplici proportione notaveris, semper pares pariter procreantur. Praeter hanc autem generationem ut nascantur aliter impossibile est. Huius autem rei tale detur per ordinem descriptionis exemplum sintque cuncti duplices ab uno i ii iiiij viij xvi xxxij lxiiiij cxxviiij cclvi dxii atque hinc si fiat infinita progressio, tales cunctos invenies, factique sunt ab uno in cuplici proportione, et omnes sunt pariter pares.

Illud autem non minima consideratione dignum est, quod eius omnis pars ab una parte quacunque, quae intra ipsum numerum est, denominatur tantamque summam quantitatis includit, quota pars est alter numerus pariter paris illius, qui eum respondeant, ut quota pars una est, tantam habeat altera quantitatem, et quota pars ista est, tantum in priore summa necesse sit multitudinis inveniri. Et primum fit, si pares fuerint dispositiones, ut duae mediae partes sibi respondeant, post vero quae super ipsas sunt, sibi invicem converantur, atque hoc idem fiat, donec uterque terminus extremitatis incurrat. Ponatur enim pariter paris ordo ab uno usque cxviiij hoc modo: i ii iiiij viij xvi xxii lxiiiij cxxviiij et ea sit summa maxima. In hoc igitur, quoniam pares dispositiones sunt, una medietas non potest inveniri. Sunt igitur duae, id est viij et xvi quae considerandae sunt, quemadmodum ipsae sibi respondeant. Totius enim summae, id est cxviiij octava pars est xvi, sextadecima viij. Rursus super has partes quae sunt, ipsae sibi invicem respondebunt, id est xxxii et iiiij. Nam xxxii quarta pars est totius summae, iiiij vero tricesima secunda. rursus super has partes lxiiiij secunda pars est, ii vero sexagesima quarta; donec extremitates limitem faciant, quas dubium non es eadem responsione gaudere. Est enim omnis summa semel cxxviiij, unus vero centesimus vicesimus octavus.

Si autem in pares terminos ponamus, id est summas -- idem enim terminos quod summas nomino -- secundum imparis naturam potest una medietas inveniri atque ipsa una sibi est responsura. Si enim ponatur hic ordo i ii iiiij viij xvi xxxii lxiiiij una erit sola medietas, id est viij, qui viij summae totius pars est octava, et sibi ipsi ad denominationem quantitatemque convertitur. Eodemque modo sicut superius circa ipsum qui sunt termini donant sibi mutua nomina secundum proprias quantitates vocabulumque permutant. Nam iiiij sextadecima pars est totius summae, xvi vero quarta. Et rursus super terminos hos xxxii secunda pars est totius summae, ii vero tricesima secunda; et semel tota summa lxiiiij sunt, sexagesima quarta vero unitas invenitur. Hoc igitur est, quod dictum est, omnes eius partes et nomine et quantitate pariter pares inveniri.

Hoc quoque multa consideratione multaque constantia divinitatis perfectum est, ut ordinatim dispositae minores summae in hoc numero et super se ipsas coacervatae sequenti minus uno sepe aequentur. Si enim unum iungas his, qui sequuntur, duobus fiunt iiiij, id est, qui uno minus quaternario cadant, et si superioribus

addas iij, sunt vii, qui ab oconario sequente sola unitate vincuntur. Sed si eosdem viij supradictis adiunxeris, xv fient, qui par xvi numeri existeret quantitati, nisi minor unitas inperdiret. Hoc autem prima etiam numeri progenies servat atque custodit. Namque unitas, quae prima est, duobus subsequentibus sola est unitate contractior; unde nihil mirum est, totum summae crementum proprio consentire principio. Hae autem nobis consideratio maxime proderit in his numeris cognoscendis, quos superfluos vel inminutos perfectosque monstrabimus. Illic enim coacervata quantitas partium numeri totius termino comparatur.

Illud quoque nulla possumus oblivione transimmittere, quod in hoc numero respondentibus sibi invicem partibus multiplicatis maior extremitas eiusdem numeri summae conficitur. Et primum si pares fuerint dispositiones medii multiplicantur atque deinde qui super ipsos sunt et usque ad supradictas extremitates. Si enim fuerint pares dispositiiones secundum naturam paris duos in medio terminos continebunt, ut in ea dispositione numerorum, in qua extremus terminus cxxvii finitur. In hoc enim numero meidetates sunt viij scilicet et xvi, quae in se multiplicatae maioris summam crescente pluralitate conficiunt. Ocites enim xvi vel sedecies viij, si multiples, cxxvii summa concrecet, atque hi numeri, qui super eosdem sunt, si multiplicentur, idem faciunt. Nam iij et xxxii, in se si multiples supra dictam facient extremitatem. Iij enim tricies et bis, vel quater xxxii ducti cxxvii inmutabili necessitate complebunt, atque hoc usque ad extremus terminus cxxvii est; centies vices atque octies unitate multiplicata nihil de priore quantitate mutabitur.

Si autem in pares fuerint dispositiones, unus medius terminus invenitur, atque ipse sibi propria multiplicatione respondet. In eo namque ordine numerorum, ubi extremus terminus lxxiiij pluralitate concluditur, sola invenitur una medietas, id est viij, quam si octies id est in semet ipsum multiples lxxiiij explicabit, atque idem reddent illi, qui super hanc meidetatem sunt, ut dudum hi, qui super duas positi, faciabant. Nam quater xvi lxxiiij sunt et sedecies iij idem complent. Rursus bis xxxii facti a lxxiiij non discedunt, et tricies bis ii eosdem cumulant, et semel lxxiiij vel untias sexagies quater multiplicata eundem numerum sine ulla variatate restituent.

De numero pariter impari eiusque proprietatibus.

Pariter autem impar numerus est, qui et ipse quidem paritatis naturam substantiamque sortitus est, sed in contraria divisione naturae numeri pariter paris obponitur. Docebitur namque, quam longe hic dissimili ratione dividatur. Nam quoniam par est, in partes aequalies recipit sectionem, partes vero eius mox indivisibiles aequae insecabiles permanebunt, ut sunt vj x xiiij xviiij xxij et his similes. Mox enim hos numeros si in gemina fueris divisione partitus, in curris in inparem, quem secare non possis. Accidit autem his quod omnes partes contrarie denominatas habent, quam sunt tantitates ipsarum partium, quae denominantur. Neque unquam fieri potest, ut quaelibet pars huius numeri eiusdem generis denominationem quantitatemque suscipiat. Semper enim se denominatio fuerit par, quantitas partis erit impar, si denominatio impar, quantitas par: ut in xviiij secunda eius pars, id est media, quod partitatis nomen est, viiiij, quae impar est tantitas; tertia vero, quae impar est denominatio, vj cui par pluralitas est. Rursus si convertas, sexta pars, quae par est denominatio, iij sunt, sed ternarius impar est; et nona pars, quod impar est vocabulum, ij qui par numerus est; atque idem in aliis cunctis, qui sunt pariter in pares, invenitur. Neque unquam fieri potest, ut, cuiuslibet partis eiusdem sit generis nomen et numerus.

Fit autem horum procreatio numerorum, si ab uno disponantur, quicumque duobus differunt, id est omnibus imparibus naturali sequentia atque ordine constitutis. Namque hi si per binarium numerum multiplicentur, omnes pariter in pares rite pluralitas demensa sufficet. Ponatur enim prima unitas i et post hunc, qui ab hoc duobus differt, id est iij et post hunc, qui rursus a superiore duobus, id est v, et hoc in infinitum et sit huius modi dispositio:

j iij v vij viiiij xj xiiij xv xvij xviiij

Hi ergo naturaliter se sequentes in pares sunt, quos nullus in medio par numerus distinguit. Hos si per binarium numerum multiples, efficies hoc modo: bis i id est ij, qui dividitur quidem, sed eius partes indivisibiles repperiuntur propter insecabilis unitatis naturam; bis iij, bis v, bis vij, bis viiiij, bis xj, et diinceps, ex quibus nascuntur hi: ij vj x xiiij xviiij xxij, quos si divides, unam recipient sectionem ceteram repudiantes, quod secunda divisio ab impari medietate partis excluditur. His autem numeris a se invicem quaternarii sola distantia est; namque inter ij et vj numeros iij sunt, rursus inter vj et x et inter x et xiiij, inter xiiij et xviiij idem

quaternarius differntiam facit. Hi namque omnes quaternaria sese numerositate transcendunt, quod idcirco contingit, quoniam primi qui positi sunt, id est eorum fundamenta, binario se numero praecedebant, quos quoniam per binarium multiplicavimus, in quaternarium faciunt summam. Igitur in naturalis numeri dispositione pariter in pares numeri quinto loco a se distant, solix iij se praecedunt, iij in medio transeuntes, per binarum numerum multiplicatis imparibus procreati. Contrariae vero esse dicuntur hae species numerorum, id est pariter par et pariter impar, quod in numero pariter impari sola divisionem recipit maior extremitas, in illo vero solus minor terminus sectione solutus est, et quod in forma pariter paris numeri ab extremitatibus incipienti et usque ad media progredienti, quod continentur sub extremis terminis, idem est illi, quod continentur sub intra se positis summulis atque hoc idem usquedum ad duas medietates fuerit ventum in dispositionibus scilicet paribus; si autem fuerint in pares dispositiones, quod ab una medietate conficitur, hoc idem sub altrinsecus positus partibus procreatur, atque hoc usquedum ad extremitates progressio fiat. In ea enim dispositione, quae est par ut ij iij viij xvj, idem reddunt ij per xvj multiplicati, quod iij per octinarium ducti, utroque enim modo xxxij fient. Quod si impar sit ordo, ut est ij iij viij, idem facient extremi, quod medietas; bis enim viij sunt xvj, qui umerus a quaternario in se ducto perficitur. In numero vero pariter impari, si fuerit unus in medio terminus, circum se positiorum terminorum, si in unum redigantur, medietas est, et idem eorum quoque, qui super hos sunt terminos, medietas est, atque hoc usque ad extremos omnium terminorum, ut in eo ordine, qui est pariter imparium numerorum, ij vj x iunctus binarius cum denario xxj explet, cuius senarius medietas invenitur. Si vero fuerint duae medietates iunctae, ipsoae utraeque aequales erunt super se terminis constitutis, ut est in hoc ordine ij vj x xij. Iuncti enim ij et xij in xvj crescunt, quos senarius cum denario copulatus efficit. Atque hoc in numerosioribus terminis initio sumpto a mediis evenit usquedum ad extrema veniatur.

De numero impariter pari eiusque proprietatibus deque eius ad pariter parem et pariter inparem cognatione

Inpariter par numerus est ex utrisque confectus et medietatis loco gemina extremitate concluditur, ut, quo ab utroque discrepet, eadem ad alterutrum cognatione iugatur. Hic autem talis est, qui dividitur in aequas partes, cuiusque pars in alias aequas dividi potest, etiam aliquando partes partium dividuntur, sed non usque ad unitatem progreditur aequalis illa disiunctio, ut sunt xxiiij et xxviiij. Hi enim possunt in medietates sine aliqua dubitatione solvuntur. Sunt etiam quidam alii numeri, quorum partes alias recipiunt divisiones, sed ipsa divisio ad unitatem usque non pervenit. Igitur in eo, quod plus quam unam suscipit sectionem, habet similitudinem pariter paris, sed a pariter impari segregatur; in eo vero, quod usque ad unum sectio illa non ducitur, pariter inparem non refutat, sed a pariter pari disiungitur. Contingit autem huic numero et utraque habere, quae superiores non habent, et utraque, quae illi recipiunt, obtinere. Et habet quidem, quod utrique non habent, quod cum in uno solus maior terminus divideretur, in alio vero solus maior terminus divisionem recipit, neque minor solus terminus a divisione seiungitur. Nam et partes solvuntur et usque ad unitatem sectio illa non pervenit, sed ante unitatem invenitur terminus, quem secare non possis. Obtinet autem, quae illi quoque recipiunt, quod quaedam partes eius respondent denominaturque secundum genus suum ad propriam quantitatem, ad similitudinem scilicet pariter paris numeri, aliae vero partes contrarium denominationem sumunt propriae quantitatis, ad pariter imparis scilicet formam. In xxiiij enim numero par est quantitas partis a pari numero denominata. Nam quarta vj secunda xij sexta vero iij duodecima ij, quae vocabula partium a quantitatis paritate non discrepant. Contrarie vero denominantur, ut tertia pars viij, octava vero iij. Vicesima autem quarta j quae denominationes cum pares sint, inveniuntur in pares quantitates, et cum sint pares summae, sunt in pares denominationes.

Nascuntur autem tales numeri ita, ut substantiam naturamque suam in ipsa etiam propria generatione designent ex pariter paribus et pariter imparibus procreari. Pariter enim in pares cuncti dudum ordinatim positus imparibus nascebantur, pariter vero pares ex duplici progressionem. Disponantur igitur omnes in ordinem naturaliter in pares a tribus et sub his a quattuor inchoantes omnes duplices et sint hoc modo:

					x
ij	ij	iiij	j	iiij	
					c
iiij	iiij	vj	xxij	xxiiij	xxviiij

His igitur ita positus si primus primi multiplicatione concreseat, id est si quaternarii ternarius, vel si idem primus secundi, id est octonarii ternarius, ve si idem primus tertii, id est ternarius sedecimi, et idem usque ad

ultimum, vel si secundus primi, vel si secundus secundi, vel si secundus tertii et eadem usque ad extremum multiplicatio proferatur, vel si tertius a primo ichoans usque in extremum transeat atque ita quartus et omnes in ordinem superiores multiplicent eos, qui sub ipsis in dispositioe sunt, omnes inpariter pares procreabuntur. Huius autem rei tale sumamus exemplum. Si iij quater multiplices xij fient, vel si v quattuor mltiplicent xx numerus excrescet, vel si item vij multiplicent iiij, xxvij succrescet, atque hoc usque in finem. Rurus si viij multiplicent iij nascentur xxiiij; si viij in v fiunt xl, si viij in vii collegentur lvj atque ad hunc modum si omnes inferiores duplices a superioribus multiplicentur, vel si superiores eosdem inferiores multiplicent, cunctos, qui nati fuerint, inpariter pares invenies.

Atque haec est admirabilis huius numeri forma, quod cum fuerit ipsa dispositio descriptoque perspecta numerorum, ad latitudinem pariter inparem, ad longitudinem pariter parium numerorum proprietas invenitur. Sunt enim duabus in latitudine medietatibus aequales duae extremitates vel una medietate duae duplices extremitates. In longitudine vero pariter paris numeri rem proprietatemque designat. Quod enim sub duabus medietatibus continetur, aequale est ei, quod sub extremis conficitur, vel quod ab una medietate nascitur, aequale est illi, quod sub utrisque extremitatibus continetur. Descriptio autem, quae subposita est, hoc modo facta est: quantoscunque in ordine pariter parium numerorum ternarius numerus multiplicavit, quicumque ex eo procreati sunt, primo sunt versu dispositi; rursus qui eosdem multiplicante quinario nati sunt, secundo loco sunt constituti, post vero, quos septenarius ceteros multiplicando procreavit, eosdem tertio conscripsimus loco, atque idem in reliqua descriptionis parte perfecimus.

Descriptionis ad inpariter paris naturam pertinentis expositio

Superius igitur digestae descriptionis haec ratio est: Si ad latitudinem respicias, ubi est duorum terminorum una medietas, ipsosque terminos iungas, duplos eos medietate propria repperies, ut xxxvj et xx faciunt lvj, quorum medietas est xxvij, qui medius est inter eos terminus constitutus. Et rurus xxvij et xij si iungas, faciunt xl, quorum xx medietas medius eorum terminus invenitur. At vero ubi duas medietates habent, utraeque extremitates iuncate utrisque medietatibus aequales fiunt, ut xij et xxvj, cum iunxeris, fiunt xlviij. Horum si medietates sibimet applicaveris, id est xx et xxvij, idem erit. Atque in alia parte latitudinis eodem ordine qui fiunt numeri notati sunt, neque ulla in re ratio utriusque latitudinis discrepabit; idemque in eodem ordine in ceteris numeris pernotatbis; et hoc secundum formam pariter inparis numeri sit, in quo hanc proprietatem esse supra iam dictum est.

Rursus si ad longitudinem respicias, ubi duo termini unam medietatem habent, quod fit ex multiplicatis extremitatibus, hoc sit, si medius terminus suae capiat pluralitatis augmenta. Nam duodecies xlviij faciunt xlxxvj; medius vero eorum terminus, id est xxiiij si multiplicetur, eosdem rurus dlxxvj procreabit. et rurus si xxiiij in xcvi multiplicentur, faciunt mmcciiij, quorum medius terminus, id est xlviij, si in semet ipsum duactur, idem mmcciiij procreantur. Ubi autem termini duo duas medietates includunt, quod fit multiplicatis extremitatibus, hoc idem redditur in alterutram summam medietatibus ductis. Duodecies enim xcvi multiplicatis mclij procreantur. Duae vero eorum medietates, id est xxiiij et xlviij si in semet ipsas multiplicentur, eosdem mclij retinent. Atque hoc est ad imitationem cognationemque numeri pariter paris, a quo participatione tracta haec ei recognoscitur ingenerata proprietas. Et in alio vero latere longitudinis eadem ratio descriptione notata est. Quare manifestum est, hunc numerum ex prioribus duobus esse procreatum, quoniam eorum retinet proprietates.

De numero impari eiusque divisione

Inpar quoque numerus, qui a paris numeri natura substantiaque disiunctus est—si quidem ille in gemina aequa dividi potest, hic ne secari queat, unitatis inpedit inverventus—tres habet similiter subdivisiones, quarum una eius pars est is numerus, qui vocatur primus et incompositus, secunda vero, qui est secundus et compositus, et tertia is, qui quadam horum medietate coniunctus est et ab utriusque cognatione aliquid naturaliter trahit, qui est per se quidem secundus et compositus, sed ad alios comparatus primus et incompositus invenitur.

De prime et incompositio

Et primus quidem et incompositus est, qui nullam aliam partem habet nisi eam, quae a tota numeri quantitate denominata sit, ut ipsa pars non sit nisi unitas, ut sunt iij v vij xj xiiij xvij xviiiij xxiiij xxviiiij xxxj. In his ergo singulis nulla unquam alia pars invenietur, nisi quae ab ipsis denominata est, et ipsa tantum unitas, ut supra iam dictum est. In tribus enim una pars sola est, id est tertia, quae a tribus scilicet denominata est, et ipsa tertia pars unitas; eodemque modo quinarium sola quinta pars est et haec unitas, atque idem in singulis consequens reperietur. Dicitur autem primus et incompositus, quod nullus eum alter numerus metiatur praeter solam, quae cunctis mater est, unitatem. Namque ternarium iij non numerant, idcirco, quoniam si solos duos contra iij compares puiores sunt, sin vero binarium bis facias, amplior est tribus, cum crescit in iiiij. Metitur autem numerus numerum, quotiens vel semel vel bis vel tertio vel quotienslibet numerus ad numerum comparatus neque deminuta summa neque aucta ad comparati numeri terminum usque pervenerit, ut iij si ad vij compares, binarius numerus senarium tertio metietur. Primos ergo et incompositos nullus numerus metietur praeter unitatem solam, quoniam ex nullis aliis numeris compositi sunt, sed tantum ex unitatibus in semet ipsis auctis multiplicatisque procreantur. Ter enim unus iij et quinquies unus v et septies unus vij fecerunt, et alii quidem, quos supra descripsimus, eodem modo nascuntur. Hi autem in semet ipsos multiplicati faciunt alios numeros velut primi, eosque primam rerum substantiam vimque sortitos cunctorum a se procreatorum velut quaedam elementa repperit, quia scilicet incompositi sunt et simpliciter generatione formati atque in eos omnes, quicunque ex his prolati sunt numeri, resolvuntur, ipsi vero neque ex aliis producuntur neque in alios reducuntur.

De secundo et composito

Secundus vero et compositus et ipse quidem impar est, propterea quod eadem impari proprietate formatus est, sed nullam in se retinet substantiam principalem compositusque est ex aliis numeris habetque partes et a se ipso et ab alieno vocabulo denominatas; sed a se ipso denominatam partem solam semper in his repperit unitatem, ab alieno vero vocabulo vel unam vel quotlibet alias, quanti fuerint scilicet numeri quibus ille compositus procreatur, ut sunt hi: viiiij xv xxj xxv xxvij xxxiiij xxxviiiij. Horum ergo singuli habent quidem a se denominatas partes proprias, scilicet unitates, ut viiiij nonam, id est unum, xv quintam decimam eandem rursus unitatem et in ceteris, quos supra descripsimus, idem convenit.

Habent etiam ab alieno vocabulo partem, ut viiiij tertiam, id est ternarium, et xv tertiam, id est quinque, et quintam, id est tres; xxj vero tertiam vij, septimam iij; et in omnibus aliis eadem consequentia est.

Secundus autem vocatur hic numerus, quoniam non sola unitate metitur sed etiam alio numero, a quo scilicet coniunctus est, neque habet quicquam in se principalis intellegentiae. Nam ex aliis numeris procreatur viiiij quidem ex tribus, xv vero ex tribus et v, at xxj ex tribus et vij et ceteri eodem modo. Compositus autem dicitur eo, quod resolvi potest in eosdem ipsos, a quibus dicitur esse compositus, in eos scilicet, qui compositum numerum metiuntur. Nihil autem, quod dissolvi potest, incompositum est, sed omni rerum necessitate compositum.

De eo, qui per se secundus et compositus est, ad alium primus et incompositus

His vero contra se positus, id est primo et incomposito et secundo et composito, et naturali diversitate disiunctis alius in medio consideratur, qui ipse quidem compositus sit et secundus et alterius recipiens mentionem atque ideo et partis alieni vocabuli capax, sed cum fuerit ad alium eiusdem generis numerum comparatus, nulla cum eo communi mensura coniungitur; nec habebunt partes aequivocas; ut sunt viiiij ad xxv. Nulla hos communis numerorum mensura metitur, nisi forte unitas, quae omnium numerorum mensura communis est. Et hi quidem non habent aequivocas partes. Nam quae in viiiij tertia est, in xxv non est, et quae in xxv quinta est, in novenario non est. Ergo hi per naturam utriusque secundi et compositi sunt, comparati vero ad se invicem primi incompositique redduntur, quod utrosque nulla alia mensura metitur, nisi unitas, quae ab utrisque denominata est; nam in novenario nona est, in xxv vicesima quinta.

De primi et incompositi et secundi et compositi et ad se quidem secundi et compositi, ad alterum vero primi et incompositi procreatione

Generatio autem ipsorum atque ortus huiusmodi investigatione colligitur, quam scilicet Eratosthenes cribrum nominabat, quod cunctis imparibus in medio conlocatis per eam quam tradituri sumus artem, qui primi quive secundi quique tertii generis videantur esse distinguitur. Disponantur enim a ternario numero cuncti in ordinem impares in quamlibet longissimam porrectionem. *ij v vij viij xj xij xv xvij xviii xxj xxij xxv xxvij xxviii xxxj xxxij xxxv xxxvij xxxviii xlj xlij xlv xlvij*. His igitur ita dispositis considerandum, primus numerus quem eorum, qui sunt in ordine positi, primum metiri possit. Sed duobus praeteritis illum, qui post eos est positus, mox metitur, et, si post eundem ipsum, quem mensus est, alii duo transmissi sint, illum qui post duos est, rursus metitur, et eodem modo, si duos quis reliquerit, post eos qui est, a primo numero metiendus est; eodemque modo relictis semper duobus omnes a primo in infinitum pergentes metientur.

Sed id non vulgo neque confuse. Nam primus numerus illum, qui est post duos secundum se locatos, per suam quantitatem metitur. Ternarius enim intermissis duobus id est *v* et *vij* novenarium metitur, et hoc per suam quantitatem id est per ternarium. Ternarius enim numerus tertio *viii* metitur. Si autem post novenarium duos reliquero, qui mihi post illos incurrerit, a primo metiendus est per secundi imparis quantitatem, id est per quinarium. Nam si post *viii* duos relinquam, id est *xj* et *xij* ternarius numerus *xv* metietur per secundi numeri quantitatem, id est per quinarium, quoniam ternarius *xv* quinquies metitur. Rursus si a quindenario inchoans duos intermisero, qui posterior positus est, eius primus numerus mensura est per tertii imparis pluralitatem. Nam si post *xv* intermisero *xvij* et *xviii*, incurrit *xxj*, quem ternarius numerus secundum septenarium metitur *xxj* enim numeri ternarius septima pars est, atque ideo hoc in infinitum faciens reperio primum numerum, si binos intermiserit, omnes sequentes posse metiri secundum quantitatem positorum ordine imparium numerorum.

Sin vero quinarium numerus, qui in secundo loco est constitutus, velit quis, cuius prima ac deinceps mensura sit, invenire, transmissis *iiij* imparibus quintus ei, quem metiri possit, occurrit. Intermittantur enim *iiij* impares, id est *vij* et *viii* et *xj* et *xij*. Post hos est *xv*, quem quinarium metitur secundum primi scilicet quantitatem id est ternarii. V enim *xv* tertio metitur. Ac deinceps si quattuor intermittat, eum, qui post illos locatus est secundus, id est quinarium, sui quantitate metitur. Nam post *xv* intermissis *xvij* et *xviii* et *xxj* et *xxij* post eos *xxv* reperio, quos quinarium scilicet numerus sua pluralitate metitur. Quinquies enim quinario multiplicato *xxv* succrescunt. Si vero post hunc quilibet *iiij* intermittat, eadem ordinis servata constantia, qui eos sequitur, secundum tertii, id est septenarii numeri, summam a quinario metietur; atque haec est infinita progressio.

Si vero tertius numerus quem metiri possit, exquiratur, sex in medio relinquatur, et quem septimum ordo monstraverit, hic per primi numeri, id est ternarii, quantitatem metiendus est; et post illum sex aliis interpositis, quem post eos numerum series dabit, per quinarium, id est per secundum, tertii eum mensura percurret. Sin vero alios rursus sex in medio quis relinquat, ille, qui sequitur, per septenarium numerum ab eodem septenario metiendus est id est per tertii quantitatem; atque hic usque in extremum ratus ordo progreditur.

Suscipiant ergo metiendi vicissitudinem quemadmodum sunt in ordinem naturaliter impares constituti. Metientur autem, si per pares numeros a binario inchoantes positos inter se impares rata intermissione transsiliant, ut primus duo, secundus *iiij*, tertius *vj* quartus *vij* quintus *x*, vel si locos suos conduplicent et secundum duplicationem terminos intermittant, ut ternarius qui primus est numerus et unus -- omnis enim primus unus est -- bis locum suum multiplicet faciatque bis unum; qui cum *ij* sint, primus *ij* medios transeat. Rursus secundus, id est quinarium, si locum suum duplicet, *iiij* explicabit, hic quoque uti *iiij* intermittat. Item si septenarius, qui tertius est, locum suum duplicet, sex creabit. Bis enim *ij* senarium iungunt. Hic ergo in ordinem *vj* relinquat. Quartus quoque si locum suum duplicet, *vij* succrescent. Ille quoque octo transsiliat. Atque hoc quidem in ceteris perspicendum.

Modum autem mensionis secundum ordinem conlocatorum ipsa series dabit. Nam primus primum quem numerat, secundum primum numerat, id est secundum se; et secundum primum quem numerat, per secundum numerat, et tertium per tertium et quartum item per quartum. Cum autem secundus mensionem susceperit, primum quem numerat, secundum primum metitur, secundum vero quem numerat, per se, id est per secundum, et tertium per tertium, et in ceteris eadem similitudine mensura constabit. Alios ergo si respicias vel qui alios mensi sunt, vel qui ipsi ab aliis metiuntur, invenies omnium simul communem mensuram esse non posse, neque ut omnes quemquam alium simul numerent; quosdam autem ex his ab alio posse metiri, ita ut ab uno tantum numerentur; alios vero, ut etiam a pluribus; quosdam autem, ut praeter unitatem eorum nulla mensura sit. Qui ergo nullam mensuram praeter unitatem recipiunt, hos primos et incompositos iudicamus, qui vero aliquam

mensuram praeter unitatem vel alienigenae partis vocabulum sortiuntur, eos pronuntiemus secundos atque compositos. Tertium vero illud genus per se secundi et compositi, primi vero et incompositi ad alterutrum comparati, hac inquisitor ratione, repperiet. Si enim quoslibet illos numeros secundum suam in semet ipsos multiples quantitatem, qui procreantur, ad alterutrum comparati nulla mensurae communione iunguntur. III enim et v si multiples, iij tertio viiij facient, et quinquies v reddent xxv. His igitur nulla est communis mensurae cognatio. Rursus v et vij quos procreant, si compares, hi quoque incommensurabiles erunt. Quinquies enim v, ut dictum est, xxv, septies vij faciunt xlviiiij, quorum mensura nulla communis est; nisi forte omnium horum procreatrix et mater unitas.

De inventione eorum numerorum, qui ad se secundi et compositi sunt, ad alios vero relati primi et incompositi

Qua vero ratione tales numeros invenire possimus, si quis nobis eosdem proponat et imperet agnoscere, utrum aliqua mensura commensurabiles sint, an certe sola unitas utrosque metiatur, repperiendi ars talis est. Datis enim duobus numeris inaequalibus, auferre de maiore minorem oportebit, et qui relictus fuerit, si maior est, auferre ex eo rursus minorem, si vero minor fuerit, eum ex reliquo maiore detrahare atque hoc eo usque faciendum, quoad unitas ultima vicem retractionis impediat, aut aliquis numerus, impar necessario, si utriusque numeri impares proponantur; sed eum, qui relinquitur, numerum sibi ipsi videbis aequalem. Ergo si in unum incurrat vicissim ista subtractio, primi contra se necessario numeri dicentur et nulla alia mensura nisi sola unitate coniuncti. Si vero ad aliquem numerum, ut superius dictum est, finis deminutionis incurrerit, erit numerus, qui metiatur utrasque summas, atque eundem ipsum, qui remanserit, dicemus utrorumque communem esse mensuram.

Age enim duos numeros propositos habeamus, quos iubeamur agnoscere, an eos aliqua communis mensura metiatur; atque hi sint viiij scilicet et xxviiiij. Hoc igitur modo faciemus reciprocam deminutionem. Auferamus de maiore minorem, hoc est de xxviiiij novenarium, relinquuntur xx. Ex his ergo xx rursus minorem detrahimus, id est viiij et relinquuntur xj. Ex his rursus detraho viiij, relictus sunt ij. Quos si detraho novenario, reliqui sunt vij; quos si duo rursus septenario dempserim, supersunt v, atque ex his alios duos, iij rursus exuberant, quos alio binario deminutos sola unitas superstes egreditur. Rursus si ex duobus unum auferam in uno terminus detractionis haerebit, quem duorum illorum numerorum, id est viiij et xxviiiij solam neque aliam constat esse mensuram. Hos ergo contra se primos vocabimus.

Sed sint alii numeri nobis eadem condicione propositi, id est xxj et viiij, ut quales hi sint investigentur, cum sibimet fuerint invicem comparati. Rursus aufero de maiore minoris numeri quantitatem, id est viiij de xxj, relinquuntur xij. Ex his rursus demo viiij, supersunt ij. Qui si ex novenario detrahantur, senarius relinquetur. Quibus item si quis ternarium demat, iij relinquuntur, de quibus iij detrahi nequeunt, atque hic est sibi ipsi aequalis. Nam iij, qui detrahebantur, usque ad ternarium numerum pervenerunt, a quo quoniam aequales sunt, detrahi minuique non poterunt. Hos igitur commensurabiles pronuntiabimus et est eorum, qui est reliquus, ternarius mensura communis.

Alia partitio paris secundum perfectos, imperfectos et ultra quam perfectos

Ac de imparibus numeris quantum introductionis permittebat brevitatis expeditum est. Rursus numerorum parium sic fit secunda divisio. Alii enim eorum sunt superflui, alii deminuti secundum utrasque habitudines inaequalitatis. Omnis quippe inaequalitas aut in maioribus aut in minoribus consideratur. Illi enim inmoderata quodammodo plenitudine proprii corporis modum partium suarum numerositate praecedunt; illos autem velut paupertate inopes oppressosque quadam naturae suae inopia minor, quam ipsi sunt, partium summa componit. Atque illi quidem, quorum partes ultra quam satis est sese porrexerint, superflui nominantur, ut sunt xij vel xxiiiij. Hi enim suis partibus comparati maiorem partium summam toto corpore sortiuntur. Est enim duodenarii medietas vj pars tertia iij pars quarta iij pars sexta ij pars duodecima j omnisque hic cumulus redundat in xvj et totius corporis sui multitudinem vincunt. Rursus xxiiiij numeri medietas est xij, tertia viij, quarta vj, sexta iiiij, octava iij, duodecima ij, vicesima quarta j, qui omnes xxx et vj rependunt. In qua re manifestum est, quod summa partium maior est et supra proprium corpus exundat. Atque hic quidem, cuius compositae partes totius summam numeri vincunt, superfluous appellatur, deminutus vero ille, cuius eodem modo compositae partes totius termini multitudine superantur, ut viij vel xiiiij. Habet enim octonarius partem mediam, id est iij, habet et

quartam, id est ij, et octavam, id est j quae cunctae in unum redactae vij colligunt, minorem scilicet summam toto corpore concludentes. Rursus xiiij habent medietatem, id est septenarium, habent septimam, id est ij, habent quartam decimam, id est j quae in unum si collectae sint, denarii numeri summa succrescit, toto scilicet termino minor.

Atque hi quidem hoc modo sunt, ut prior ille, quem suae partes superant, talis videatur, tamquam si quis multis super naturam manibus natus, ut centimanus gigas vel triplici coniunctus corpore, ut Geryo tergeminus, vel quicquid unquam monstruosum naturae in partium multiplicatione subripuit; ille vero, ut si naturaliter quadam necessaria parte detracta aut minus oculo nasceretur, ut Cyclopeae frontis dedecus fuit, vel quo alio curtatus membro naturale totius suae plenitudinis spendium sortiretur.

Inter hos autem velut inter inaequales intemperantias medii temperamentum limitis sortitus est ille numerus, qui perfectus dicitur, virtutis scilicet aemulator, qui nec supervacua progressionem porrigitur, nec contracta rursus deminutione remittitur, sed medietatis obtinens terminum suis aequus partibus nec crassatur abundantia, nec eget inopia, ut vj vel xxviiiij. Namque senarius habet partem mediam, id est iij, et tertiam, id est ij et sextam, id est j quae in unam summam si redactae sint par totum numeri corpus suis partibus invenitur xxviiiij vero habet medietatem xiiij et septimam iij nec caret quarta, id est vij, possidet quartam decimam ij et repperies in eo vicesimam octavam j, quae in unum redactae totum partibus corpus aequabunt. XXVIII enim iunctae partes efficient.

De generatione numeri perfecti.

Est autem in his quoque magna similitudo virtutis et vitii. Perfectos enim numeros rarerent invenies, eosque facile numerabiles, quippe qui pauci sint et nimis constanti ordine procreati. At vero superfluos ac deminutos longe multos infinitosque repperies, nec ullis ordinibus passim inordinateque dispositos et a nullo certo fine generatos. Sunt autem perfecti numeri intra denarium numerum vj intra centenarium xxviiiij intra millenarium cccxcvj intra decem milia viij cxxviiij. Et semper hi numeri duobus paribus terminantur, vj et viij, et semper alternatim in hos numeros summarum fine provenient. Nam et primum vj, inde xxviiiij post hos ccccxcvj idem senarius, qui primus, post quem viij cxxviiij idem octonarius, qui secundus.

Generatio autem procreatioque eorum est fixa firmaque, ne quo alio modo fieri possint, nec ut si hoc modo fiant, aliud quiddam ullo modo valeat procreari. Dispositos enim ab uno omnes pariter pares numeros in ordinem quousque volueris, primo secundum adgregabis, et si primus numerus et incompositus ex illa coacervatione factus sit, totam summam in illum multiplicabis, quem posterius adgregaveras. Si vero coacervatione facta primus inventus non fuerit, sed compositus et secundus, hunc transgredere, atque alium, qui sequitur, adgregabis. Si vero nec dum fuerit primus et incompositus, alium rursus adiunge et vide, quid fiat. Quod si primum incompositumque repperies, tunc in ultimam multitudinem summae coacervationem multiplicabis. Disponantur enim omnes pariter pares numeri hoc modo:

j ij iij viij xvj xxxij lxiiij cxxviiij

Facies ergo ita. Pones j eique adgregabis ij. Tunc respicias ex hac adgregatione qui numerus factus sit. Inde iij qui scilicet primus et incompositus est; et post unitatem ultimum binarium numerum adgregaveras. Si igitur ternarium, id est qui ex coacervatione collectus est, per binarium multiplices, qui est ultimus adgregatus, perfectus sine ulla dubitatione nascetur. Bis enim iij vj faciunt, qui habet unam quidem a se denominatam partem, id est sextam, iij vero medietatem secundum dualitatem, at vero ij secundum coacervationem, id est secundum ternarium, quoniam coacervati iij multiplicati sunt. xxviiiij autem eodem modo nascuntur. Si enim super j et ij, qui sunt iij addas sequentem pariter parem, id est iij, septenariam facies summam. Sed ultimum numerum quaternarium consequenter adiunxeras. Per hunc igitur si illam coacervationem multiplicaveris, perfectus numerus procreatur. Septies enim iij xxviiiij sunt, qui est suis partibus par, habens j a se denominatum, id est vicesimum octavum, medietatem vero secundum binarium xiiij, secundum quaternarium vij, septimum vero secundum septenarium iij, secundum omnium collectionem quartum decimum ij, qui vocabulo medietatis obponitur. Ergo cum hi reperti sint, si alios invenire secteris, eadem oportet ratione ut vestiges. Ponas enim j licebit, et post hunc ij et iij, qui in septenarium cumulantur. Sed de hoc dudum exstitit xxviiiij perfectus numerus. Huic igitur qui sequitur pariter par id est viij, continens iungatur accessio, qui prioribus superveniens xv restituet.

Sed hic primus et incompositus non est, habet enim generis alterius partem super illam, quae est a se ipsa denominata, quintam decimam scilicet unitatem. Hunc igitur, quoniam secundus est et compositus, praeterito et adiunge superioribus continentem pariter parem numerum, id est xvj, qui cum xv iunctus, unum ac triginta conficiet. Sed hic primus rursus et incompositus est. Hunc igitur cum extremi adgregati summa multiplica, ut fiant sedecies xxxj, qui cccxcvj explicant. Haec autem est intra millenarium numerum perfecta et suis partibus aequa numerositas. Igitur prima unitas virtute atque potentia non etiam actu vel opere et ipsa perfecta est. Nam si primam ipsam sumpsero de proposito ordine numerorum, video primam atque incompositam, quam si per se ipsam multiplico, eadem mihi unitas procreatur. Semel enim j solam efficit unitatem, quae partibus suis aequalis est potentia solum, ceteris etiam actu atque opere perfectis. Recte igitur unitas propria virtute perfecta est, quod et prima est et incomposita et per se ipsam multiplicata sese ipsam conservat.

Sed quoniam de ea quantitate, quae per se fit, dictum est, operis sequentiam ad illam, quae refertur ad aliquid, transferamus.

De relata ad aliquid quantitate.

Ad aliquid relatae vero quantitatis duplex est prima divisio. Omne enim aut aequale est aut inaequale, quicquid alterius comparatione metimur. Et aequale quidem est, quod ad aliquid comparatum neque minore summa infra est, neque maiore transgreditur, ut denarius denario vel ternarius ternario vel cubitum cubito vel pes pedi et his similia. Haec autem pars relatae ad aliquid quantitatis, id est aequalitas, naturaliter indivisa est. Nullus enim potest dicere, quod aequalitatis hoc quidem tale est, illud vero huiusmodi. Omnis enim aequalitas unam servat in propria moderatione mensuram. Illud etiam, quod, quae ei quantitas comparatur, non alio vocabulo atque ipsa, cui comparatur, edicitur. Nam quemadmodum amicus amico amicus est, vicinusque vicino, ita dicitur aequalis aequali.

Inaequalis vero quantitatis gemina divisio est. Secatur enim quod inaequale est in maius atque minus, quae contraria sibimet denominatione funguntur. Namque maius minore maius est et minus maiore minus est, et utraque non eisdem vocabulis, quemadmodum secundum aequalitatem dictum est, sed diversis distantibusque signata sunt, ad modum discentis scilicet vel docentis vel caedentis vel vapulantis vel quaecunque ad aliquid relata aliter denominatis contrariis comparantur.

De speciebus maioris quantitatis et minoris.

Maioris vero inaequalitatis v sunt partes. Est enim una, quae vocatur multiplex, alia superparticularis, tertia superpartiens, quarta multiplex superparticularis, quinta multiplex superpartiens. His igitur quinque maioris partibus obpositae sunt aliae quinque partes minoris, quemadmodum ipsum maius minori semper obponitur, quae minoris species ita singillatim speciebus quinque maioris his, quae supra dictae sunt, obponuntur, ut eisdem nominibus nuncupentur, sola tantum sub praepositione distantes. Dicitur enim submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpartiens, submultiplex superparticularis et submultiplex superpartiens.

De multiplici eiusque speciebus earumque generationibus.

Rursus multiplex est prima pars maioris inaequalitatis cunctis aliis antiquior naturaque praestantior, ut paulo post demonstrabitur. Hic autem huius modi est, ut comparatus cum altero illum, contra quem comparatus est, habeat plus quam semel; quod primum in naturalis numeri dispositione conveniet. Namque ad unum cuncti, qui sequuntur, omnium ordine multiplicium sequentias varietatesque custodiunt. Ad primum enim, id est unitatem, ij duplus, iij triplus, iiij quadruplus atque ita in ordinem progredientes omnes texuntur multiplices quantitates. Quod autem dictum est plus quam semel, id a binario numero principium capit et in infinitum per ternarium, quaternariumque et ceterorum ordinem sequentiamque progreditur. Contra hunc vero discriminatus est ille, qui vocatur submultiplex; et haec quoque prima minoris quantitatis species est. Hic autem numerus huiusmodi est, qui in alterius comparatione productus plus quam semel maioris numerat summam, sua scilicet quantitate cum eo aequaliter inchoans aequaliterque determinans. Idem autem dico numerat, quod metitur. Si igitur bis solum maiorem numerum minor numerus metiatur, subduplus vocabitur, si vero ter, subtriplus, si

quater, subquadruplus et fit per haec in infinitum progressio, additaque eos semper sub praepositione nominabis, ut unus duorum subduplus, trium subtripplus, iiij subquadruplus appelletur et consequenter.

Cum autem naturaliter multiplicitas et submultiplicitas infinita sit, eorum quoque species per proprias generationes in infinita consideratione versantur. Si enim positus in naturali constitutione numeris singulos per suas sequentias pares eligas, omnium ab uno parium atque imparium sese sequentium duplices erunt et huius speculationis terminus deficit. Ponatur enim naturalis numerus hoc modo: i ij iiij v vj vij viij viiij x xj xij xiiij xv xvj xvij xviiij xviii xx. Horum ergo si primum sumas parem, id est ij, primi duplus erit, id est unitatis; si vero sequentem parem, id est iiij, secundi duplus est, id est duorum; si vero tertium parem sumas, id est vj, tertii numeri in naturali constitutione duplus est, id est ternarii; si vero quartum parem inspicias, id est viij quarti numeri, id est quaternarii, duplus est. Idemque in ceteris in infinitum sumentibus sine aliquo impedimento procedit. Triplices autem nascuntur, si in eadem dispositione naturali duo semper intermittantur, et qui post duos sunt, ad naturalem numerum comparentur, excepto ternario, qui, ut unitatis triplus sit, solum binarium praetermittit. Post unum enim et duo tres sunt, qui triplus unius est; rursus post iiij et v sunt vj., qui secundi numeri, id est duorum, triplus est; rursus post vj sunt vij. et viij et post hos viiij, qui tertii numeri, id est ternarii triplus est; atque hoc idem in infinitum si quis faciat, sine ulla offensione procedit. Quadruplorum vero generatio incipit, si quis tres numeros intermittat. Post unum quippe et duo et ij sunt iiij, qui primi, id est unius, quadruplus est; rursus si intermisero quinarium, senarium et septenarium, octonarius mihi quartus occurrit, tribus scilicet intermissis, qui binarii, id est secundi numeri quadruplus est; at vero si post viij tres terminos intermisero, id est viiij vel x vel xj. duodenarius, qui sequitur, ternarii numeri quadruplus est; atque hoc idem in infinitum progressis necesse est evenire, semperque una terminorum intermissione si crescat adiectio, ordinatas te multiplicis numeri vices invenire miraberis. Si enim iiij intermittas, quincuplus invenitur, si v sescuplus, si vj septuplus, semperque ipsius multiplicationis nomine uno minus intermissionis vocabulo procreantur. Nam duplus unum intermittit, triplus ij quadruplus iij quincuplus iiij et deinceps ad eundem ordinem sequentia est. Et omnes quidem dupli secundum proprias sequentias parium numerorum pares sunt; tripli vero unus semper par terminus, impar alius invenitur; quadrupli vero rursus semper parem custodiunt quantitatem constituunturque a quarto numero uno ex prioribus per ordinem positus paribus intermisso, primo pari binario, post hunc viiij intermisso senario, post hunc xj transmissio denario, atque hoc idem in ceteris. Quincupli vero propositio secundum triplicis similitudinem alternatim paribus atque imparibus positus ordinatur.

De superpartulari eiusque speciebus earumque generationibus.

Superpartularis vero est numerus ad alterum comparatus, quotiens habet in se totum minorem et eius aliquam partem; qui si minoris habeat medietatem, vocatur sesquialter, si vero tertiam partem, vocatur sesquitercius, si vero quartam, sesquiquartus, et si quintam, vocatur sesquiquintus; atque his nominibus in infinitum ductis in infinitum quoque superpartularium forma progreditur. Et maiores quidem numeri hoc modo vocantur, minores vero, qui habentur toti et eorum aliqua pars, unus subsesquialter, alter subsesquitercius, alius subsesquiquartus, alius vero subsesquiquintus, atque idem secundum maiorum normam multitudinemque protenditur. Voco autem maiores numeros duces, minores comites. Superpartularium quoque infinita est multitudo ob eam rem, quod eiusdem species interminabili progressionem funguntur. Namque sesquialter habebit quidem duces omnes post ternarium numerum naturaliter triplices, comites vero omnes post binarium numerum naturaliter pares, hoc modo ut primus primo, secundus secundo, tertius tertio comparetur et deinceps. Describantur enim longissimi versus triplicium naturalis numeri atque duplicium et sit hoc modo:

j	ij	iiij	j	ij	iiij	iiij			
ij	j	iiij	ij	v	vij	xj	xiiij	xvij	xx
j	iiij	j	iiij	ij	iiij	vj	iiij	x	

Primus igitur versus continet numerum naturalem, secundus eius triplicem, tertius vero duplicem. Atque in eo si ternarius binario, vel si senarius quaternario, vel novenarius senario comparetur, vel omnes triplices superiores si duplicibus numeris consequentibus opponantur, hemiolia id est sesquialtera proportio nascetur. III

enim habent intra se ij et eorum mediam partem, id est unum. Sex quoque continent intra se iiij et eorum medietatem, id est ij. Et viij intra se senarium claudunt et eius mediam partem, id est iiij; eodemque modo in ceteris.

Dicendum vero est, si quis secundam speciem superparticularis numeri considerare desideret, id est sesquiertiam, quali ratione repperiet. Ac definitio quidem huius comparationis talis est. Sesquiertius est, qui minori comparatus habet eum semel et eius tertiam partem. Sed hi inveniuntur, si omnibus a quaternario numero continuatim quadruplis constitutis a ternario numero triplices comparentur, eruntque duces quadrupli, comites tripli. Sit enim in ordine hoc modo numerus naturalis, ut sub eo quadrupli et tripli subponantur, sub primo quadruplo primus triplus, sub secundo secundus, sub tertio tertius, et eodem modo cuncti eiusdem primi versus tripli in ordinem digerantur.

j	ij	iiij	j	ij	iiij	iiij			
iiij	iiij	ij	vj	x	xiiij	xviij	xxij	xxvj	l
ij	j	iiij	ij	v	viij	xj	xiiij	xviij	xx

Igitur primum primo si compares, sesquiertia ratio continebitur. Nam si iiij tribus compares habebunt in se iiij totum ternarium et eius tertiam partem, id est j. Et si secundum secundo id est octonarium senario compares, idem inuenies. Habebit enim octonarius senarium totum et eius tertiam partem, id est ij. Et per eandem sequentiam usque in infinitum progrediendum est. Notandum quoque est, quod ij comites sunt, duces iiij, rursus vj comites, duces viij, et in eodem ordine ceteri simili modo vocantur duces sesquiertii comites subsesquiertii. Et in cunctis secundum hunc modum posita convenit servare vocabula.

De quodam utili ad cognitionem superparticularibus accidente.

Hoc autem admirabile profundissimumque in istorum ordinibus invenitur, quod primus dux primusque comes ad se invicem nulla numeri intermissione copulantur. Nam primi se nullo in medio posito transeunt, secundi interponunt unum, tertii duos, quarti tres et deinceps uno semper minore, quam ipsi sunt, intermissione succrescunt, atque hoc vel in sesquialteris vel in sesquiertiis vel in aliis superparticularis partibus necesse est inveniri. Namque ut quaternarius contra ternarium comparetur, nullum intermisimus; post ij enim mox iiij sunt; ut vero vj contra viij, in secundo scilicet sesquiertio, una facta est intermissio. Inter vj enim et viij solus est septenarius, qui transmissus est numerus. Rursus ut viij contra xij comparemus, qui sunt in dispositione tertii duorum mediorum est facta transmissio. Inter viij enim et xij sunt x et xj. Secundum hunc modum quarta dispositio ij, quinta iiij intermittit.

Descriptio, per quam docetur ceteris inaequalitatis speciebus antiquiorem esse multiplicitem.

Quoniam autem naturaliter et secundum propriam ordinis consequentiam multiplicem inaequalitatis speciem cunctis praeposuimus primamque speciem esse monstravimus, licet hoc nobis posterioris operis ordine clarescat, hic quoque perstringentes id, quod proposuimus, planissime breviterque doceamus. Sit enim talis descriptio, in qua ponatur in ordinem usque ad denarium numerum continui numeri ordo naturalis et secundo versu duplus ordo texatur, tertio triplus, quarto quadruplus et hoc usque ad decuplum. Sic enim cognoscemus, quemadmodum superparticulari et superpartienti et cunctis aliis princeps erit species multiplicis et quaedam alia simul inspiciemus et ad subtilitatem tenuissima et ad scientiam utilissima et ad exercitationem iucundissima.

×	j	ij	iiij	iiij	v	vj	vij	viij	viiij	x
j	j	ij	iiij	iiij	v	vj	vij	viij	viiij	x
ij	ij	iiij	vj	viiij	x	xij	xiiij	xvj	xviij	xx

	ij	iiij	vj	viiij	xij	xv	xviiij	xxj	xxiiiij	xxvij	xxx
j	iii	iiij	viiij	xij	xvj	xx	xxiiiij	xviiij	xxxij	xxxvj	xl
	v	v	x	xv	xx	xxv	xxx	xxxv	xl	xlvi	l
	vj	vj	xij	xviiij	xxiiiij	xxx	xxxvj	xlj	xlviij	liiiij	lx
j	vi	vij	xiiiij	xxj	xxvii	xxxv	xlj	xlviij	lvj	lxiiij	lxx
ij	vi	viiij	xvj	xxiiiij	xxxij	xl	xlviij	lvj	lxiiiij	lxxij	lxxx
iiij	vi	viiiij	xviiij	xxvij	xxxvj	xlvi	liiiij	lxiiij	lxxij	lxxxj	xc
	x	x	xx	xxx	xl	l	lx	lxx	lxxx	xc	c

Ratio atque expositio digestae formulae.

Si igitur duo prima latera propositae formulae, quae faciunt angulum ab uno ad x et x procedentia, respiciantur et his subteriores ordines comparentur, qui scilicet a iiij angulum incipientes in vicenos terminum ponunt, duplex, id est prima species multiplicativitatis ostenditur ita, ut primus primum sola superet unitate, ut duo unum, secundus secundum binario supervadat, ut quaternarius binarium, tertius tertium tribus, ut senarius ternarium, quartus quartum quaternarii numerositate transcendat, ut viij quaternarium, et per eandem cuncti sequentiam sese minoris pluralitate praetereant. Si vero tertius angulus aspiciatur, qui ab viiiij inchoans longitudinem latitudinemque tricenis altrinsecus numeris extendit, et hic cum prima latitudine et longitudine comparetur, triplex species multiplicativitatis occurrit ita, ut ista comparatio per x litteram fiat, hique se numeri superabunt secundum paritatis factam naturaliter connexionem. Primus enim primum duobus superat, ut unum tres, secundus secundum quaternario, ut binarium senarius, tertius tertium sex, ut ternarium novenarius, et ad eundem ceteri modum progressionis augescunt. Quam rem nobis scilicet et ipsa naturalis obiecit integritas, nihil nobis extra machinantibus, ut in ipso modulo descriptionis apparet. Si quis autem quarti anguli terminum, qui xvj numeri quantitate notatus est et longitudinem latitudinemque in quadragenis determinat, velit superioribus comparare, per x litterae formam proportionem conlata, quadrupli multitudinem pernotabit, hisque est ordinabilis super se progressio, ut primus primum tribus superet, ut iiij unitatem, secundus secundum senario vincat, ut viij binarium, tertius tertium novenario transeat, ut duodenarius ternarium, et sequentes summulae trium se semper adiecta quantitate transsiliant. Et si quis subteriores aspiciat angulos, idem per omnes multiplicativitatis species usque ad decuplum dispositissima ordinatione perveniet. Si quis vero in hac descriptione superparticularis species requirat, tali modo reperiet. Si enim secundum angulum notet, cuius est initium quaternarius, eique superiacet binarius, atque ad hunc sequentem quis accommodet ordinem, sesquialtera proportio declarabitur. Nam tertius secundi versus sesquialter est, ut ij ad ij, vel vj ad iiij, vel viiiij ad vj vel xij ad viij itemque in ceteris, qui sunt in eadem serie numeri, si talis coniugatio misceatur, nulla varietatis dissimilitudo subripiet. Eadem tamen summarum supergressio est in hoc quoque, quae in duplicibus fuit. Primus enim primum, id est ternarius binarium, uno superat, secundus vero secundum duobus, tertius tertium tribus et deinceps. Si vero quartus ordo tertio comparetur, ut iiij ad ij et eodem ceteros ordine consecuteris, sesquitertia comparatio colligetur, ut iiij ad ij vel viij ad vj et xij ad viiiij. Videsne ut in omnibus his sesquitertia comparatio conservetur? Praeterea eos, qui sub ipsis sunt, si idem faciens sequentes versus alterutris comparaveris, omnes sine ullo impedimento species superparticularis agnosces.

Hoc autem in hac est dispositione divinum, quod omnes angulares numeri tetragoni sunt. Tetragonus autem dicitur, ut brevissime dicam, quod post latius explicabitur, quem duo aequales numeri multiplicant, ut in hac quoque descriptione est. Unus enim semel unus est, et est potestate tetragonus. Item bis duo iiij sunt, ter tres viiiij, quos in semet ipsos multiplicationes primi ordinis perfecerunt. Circum ipsos vero qui sunt, id est circum angulares, longilateri numeri sunt. Longilateros autem voco, quos uno se supergredientes numeri multiplicant. Circum iiij enim ij sunt et vj Sed duo nascuntur ex uno et duobus, cum unum bis multiplicaveris; sed unitas a binario unitate praeceditur; vj vero ex duobus et tribus; bis enim tres senarium reddunt. Novenarium vero vj et

xij claudunt qui xij ex tribus nascuntur et iiij ter enim iiij fiunt xij, senarius vero ex duobus et tribus, bis enim tres faciunt vj qui omnes uno maioribus lateribus procreati sunt. Nam cum vj ex binario ternarioque nascuntur, tres binarium numerum uno superant, cunctique alii eiusdem modi sunt, ut primo et secundo ordine ad alterutrum multiplicatis terminis procreentur, ita ut quod nascitur ex duobus longilateris altrinsecus positus et bis medio tetragono tetragonus sit; et rursus, quod ex duobus altrinsecus tetragonis et uno medio longilatero bis facto nascitur, ipse quoque tetragonus sit; et ut angulorum totius descriptionis ad angulares tetragonos positorum unius anguli sit prima unitas, alterius vero, qui contra est, tertia, bini vero altrinsecus anguli secundas habeant unitates; et duo angularium tetragonorum anguli aequum faciunt, quod sub ipsis continetur, illi, quod fit ab uno illorum, qui est altrinsecus, angulorum. Multa etiam sunt alia quae in hac descriptione utilia possint admirabiliaque perpendi, quae interim propter castigatam introducendi brevitatem ignota esse permittimus. Nunc vero ad sequentia propositum convertamus.

De tertia inaequalitatis specie, quae dicitur superpartiens deque eius speciebus earumque generationibus.

Igitur post duas primas habitudines multiples et superparticulares et eas, quae sub ipsis sunt, submultiplices et subsuperparticulares tertia inaequalitatis species invenitur, quae a nobis superius superpartiens dicta est. Haec autem est, quae fit, cum numerus ad alium comparatus habet eum totum intra se et eius insuper aliquas partes, vel duas vel tres vel iiij vel quotquot ipsa tulerit comparatio; quae habitudo incipit a duabus partibus tertiis; nam si duas medietates habuerit, qui illum intra se totum coerctet, duplus pro superpartiente componitur. Habebit autem vel duas quintas vel duas septimas vel duas nonas et ita progredientibus, si duas solas partes minoris numeri superhabuerit per easdem partes inparibus numeris minorem maior summa transcendit. Nam si eum habeat totum et duas eius quartas, superparticularis necessario reperitur, nam duae quartae medietas est et fit sesquialtera comparatio; sin vero duas sextas, rursus est superparticularis, duae enim sextae pars tertia est, quodsi in comparatione ponatur, sesquiterciae habitudinis efficiet formam.

Post hos nascuntur comites, qui subsuperpartientes vocantur. Hi autem sunt, qui habentur ab alio numero, et eorum vel duae vel tres vel iiij vel quotlibet aliae partes. Si ergo numerus alium intra se numerum habens eius duas partes habuerit, superbipartiens nominatur, sin vero tres, supertripartiens, quodsi iiij, superquadripartiens, atque ita progredientibus in infinitum fingere nomina licet. Ordo autem eorum naturalis est, quotiens disponuntur a tribus omnes pares atque inpaes numeri naturaliter constituti et sub his aptantur alii, qui sunt a quinario numero incipientes omnes inpaes. His igitur ita dispositis si primus primo, secundus secundo, tertius tertio et ceteri ceteris comparentur, superpartiens habitudo procreatur. Sit enim dispositio hoc modo:

ij iiij j ij iiij

ij iiij j ij v vij viij

Si igitur quinarii numeri ad ternarium comparatio consideretur, erit superpartiens ille, qui vocatur superbipartiens; habet enim quinarius totos in se tres et eorum duas partes id est duo. Si vero ad secundum ordinem speculatio referatur, supertripartiens proportio cognoscetur atque ita in sequentibus per omnes dispositos numeros omnes in infinitum species huius numeri convenientes ordinatasque respicies.

At vero quemadmodum singuli procreentur si in infinitum quis curet agnoscere, hic modus est. Habitudo enim superbipartientis, si utrisque terminis duplicetur, semper superbipartiens proportio procreatur. Si enim quis duplicet v, faciet x, si iiij, faciet vj, qui x contra senarium comparati superbipartientem faciunt habitudinem. Et hos ipsos rursus si duplicaveris, idem ordo proportionis adcrecit, idemque si infinitum facias, statum prioris habitudinis non mutabit. Si vero supertripartientes invenire contendas, primos supertripartientes, id est vij et iiij triplicabis et huiusmodi nascentur. Si vero, qui ex his nati fuerint, ternarii multiplicatione produxeris, idem rursus efficiet. Quodsi superquadripartientes quemadmodum in infinitum progrediantur, appetas addiscere, primas eorum radices in quadruplum multiples licet, id est viij et v et eos, qui illa multiplicatione proferentur, rursus in quadruplum, et eandem fieri proportionem inoffensa nimirum ratione repperies; et ceterae species una semper plus multiplicatione crescentibus radicibus oriuntur. Radices autem proportionum voco numeros in superiore dispositione descriptos, quasi quibus omnis summa supradictae comparationis innitur.

Hoc quoque videndum est, quoniam, cum duae partes ex minore plus in maioribus sunt, tertii semper vocabulum subauditur, ut superbipartiens qui dicitur, quoniam duas minoris numeri tertias partes habet, dicatur superbipartiens tertias; et cum dico supertripartiens, subaudiri necesse sit supertripartiens quartas, quoniam tribus super quartis exuberat; et superquadripartienti subauditur superquadripartiens quintas, et ad eundem modum in ceteris uno semper adiecto super habitas partes subauditio facienda est, ut eorum germana convenientiaque his nomina haec sint: qui dicitur superbipartiens, idem dicatur superbitertius; qui dicitur supertripartiens, is sit supertriquartus, et qui dicitur superquadripartiens, idem dicatur superquadriquintus, eademque similitudine usque in infinitum nomina producantur.

De multiplici superparticulari.

Igitur relatae ad aliquid quantitatis simplices et primae species hae sunt. Duae vero aliae ex his velut ex aliquibus principiis componuntur, ut multiplices superparticulares et multiplices superpartientes, horumque comites submultiplices superparticulares et submultiplices superpartientes. Namque in his ut in praedictis proportionibus minores numeri omnes addita sub praepositione dicuntur, quorum definitio talis reddi potest. Multiplex superparticularis est, quotiens numerus ad numerum comparatus habet eum plus quam semel et eius unam partem, hoc est habet eum aut duplum aut triplum aut quadruplum aut quotienslibet et eius quamlibet aliquam partem vel mediam vel tertiam vel quartam vel, quaecumque alia partium exuberatione contigerit. Hic ergo ex multiplici et superparticulari consistit. Quod enim comparatum numerum plus quam semel habet, multiplicis est, hoc vero, quod minorem in habenda parte transcendit, superparticularis. Itaque ex utroque nomine ficto vocabulo est speciesque eius ad illarum scilicet fiunt imaginem proportionum, ex quibus ipse numerus originem trahit. Nam prima pars huius vocabuli, quae multiplicis nomine possessa est, multiplicis numeri specierum vocabulo nominanda est, quae vero superparticularis est, eodem vocabulo nuncupabitur, quo superparticularis numeri species vocabantur. Dicitur enim, qui duplicem habuerit alium numerum et eius mediam partem, duplex sesquialter, qui vero tertiam, duplex sesquitertius, qui quartam, duplex sesquiquartus et deinceps. Si vero ter eum totum contineat et eius mediam partem vel tertiam vel quartam, dicitur triplex sesquialter, triplex sesquitertius, triplex sesquiquartus et eodem modo in ceteris; diciturque quadruplus sesquialter, quadruplus sesquitertius, quadruplus sesquiquartus; et quotiens totum numerum in semet ipso continuerit per multiplicis numeri species appellabitur, quam vero partem comparati numeri clauserit, secundum superparticularem comparisonem habitudinemque vocabitur.

Horum autem exempla huiusmodi sunt. Duplex sesquialter est, ut v ad duo. Habent enim v binarium numerum bis et eius mediam partem, id est j. Duplex vero sesquitertius est septenarius ad ternarium comparatus. At vero novenarius ad quaternarium duplex sesquiquartus; si vero xj ad v, duplex sesquiquintus; et hi semper nascentur dispositis in ordinem a binario numero omnibus naturaliter paribus imparibusque terminis, si contra eas omnes a quinario numero impares comparentur, ut primum primo, secundum secundo, tertium tertio caute et diligenter adponas, ut sit dispositio talis:

$$\begin{array}{ccccccc} j & ij & iij & & j & ij & iij & iiij & & j \\ ij & iij & j & iij & v & vij & viij & xj & xij \end{array}$$

Si vero a duobus paribus omnibus dispositis terminis illi, qui a quinario numero inchoantes quinario numero rursus sese transsiliunt, comparentur, omnes duplices sesquialteros creant, ut est subiecta descriptio,

$$\begin{array}{cccc} j & iij & j & iij & & ij \\ v & x & xv & xx \end{array}$$

Si vero a tribus inchoent dispositiones et tribus sese transsiliant, et ad eos aptentur, qui a septenario inchoantes septenario sese numero transgrediuntur, omnes duplices sesquitercii habita diligenter comparatione nascuntur, ut subiecta descriptio monet.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & : \\ ij & j & iiij & ij & v & viij & xj \\ & & & & & & : \\ ij & iiij & xj & xvij & liij & lviiiij & \end{array}$$

Sin vero omnes in ordinem quadrupli disponantur, hi qui naturalis numeri quadrupli sunt, ut unitatis quadruplus, et duorum triumque et quattuor atque quinarii et ceterorum sese sequentium, et ad eos aptentur a novenario numero inchoantes semper sese novenario praecedentes, tunc duplilis sesquiquartae proportionis forma textetur.

$$\begin{array}{ccccccc} iiij & iiij & ij & vj & x & xiiij \\ iiij & viij & xvij & xxvj & lv & iiij \end{array}$$

Ea vero species huius numeri, quae est triplex sesquialtera, hoc modo procreatur, si disponantur a binario numero omnes in ordinem pares et ad eos a septenario numero inchoantes septenario sese supergredientes solito ad alterutrum comparationis modo aptentur.

$$\begin{array}{cccc} j & iiij & j & iiij \\ ij & iiij & xj & xiiij \end{array}$$

Si autem a ternario numero ingressi cunctos naturalis numeri triplices disponamus et eis a denario numero denario sese supergredientes ordine comparemus, omnes triplices sesquitercii in ea terminorum continuatione provenient.

$$\begin{array}{ccc} ij & j & iiij \\ & x & xx \end{array}$$

De eorum exemplis in superiori formula inveniendis.

Horum autem eorumque qui sequuntur exempla integre planeque possumus pernotare, si in priorem descriptionem, quam fecimus, cum de superparticulari et multiplici loqueremur, ubi ab uno usque in denariam multiplicationem summa concrevit, diligens velimus acumen intendere. Ad primum enim versum omnes, qui sequuntur, conlati ordinatas convenientesque multiplicis species reddent. Sin vero ad secundum cunctos, qui tertii sunt ordinis, aptaveris, ordinatas species superparticularis agnosces. Quod si tertio ordini, quicumque sunt in quinto versu, compares superpartientis numeri species positas convenienter aspicias. Multiplex vero superparticularis ostenditur, cum ad secundum versum omnes, qui sunt quinti versus serie comparantur, vel qui sunt in septimo, vel qui sunt in nono, atque ita si in infinitum sit ista descriptio, in infinitum huius proportionis species procreabuntur. Manifestum autem hoc etiam est, quod horum comites semper cum sub praepositione dicentur, ut est subduplex sesquialter, subduplex sesquitercius, subduplex sesquiquartus et ceteri quidem ad hunc modum.

De multiplici superpartiente.

Multiplex vero superpartiens est, quotiens numerus ad numerum comparatus habet in se alium numerum totum plus quam semel et eius vel duas vel tres vel quotlibet plures particulas secundum numeri superpartientis figuram. In hoc quoque propter causam superius dictam non erunt duae medietates neque duae quartae neque duae sextae, sed duae tertiae vel duae quintae vel duae septimae ad priorum similem consequentiam. Non est autem difficile secundum priorum exempla positorum hos quoque et praeter nostra exempla numeros invenire. Vocabunturque hi secundum proprias partes duplex superbipartiens, vel duplex supertripartiens, vel duplex superquadripartiensi, et rursus triplex superbipartiens et triplex supertripartiens et triplex superquadripartiensi et similiter, ut, viij ad iij comparati faciunt duplicem superbipartientem, et xvj ad vj et omnes, quicunque ab viij incipientes octonario sese numero transgrediuntur, comparati ad eos, qui a tribus inchoantes ternaria sese quantitate praetereunt. Nec erit difficile alias eius partes secundum praedictum modum diligentibus reperire. Hic quoque illud meminisse debemus, quod minores et comites non sine sub praepositione nominantur, ut sit subduplex superbipartiens, subduplex supertripartiens.

Demonstratio quemadmodum omnis inaequalitas ab aequalitate processerit.

Restat autem nobis profundissimam quandam tradere disciplinam, quae ad omnem naturae vim rerumque integritatem maxima ratione pertineat. Magnus quippe in hac scientia fructus est, si quis non nesciat, quod bonitas definita et sub scientiam cadens animoque semper imitabilis et perceptibilis prima natura est et suae substantiae decore perpetua, infinitum vero malitiae dedecus est, nullis propriis principiis nixum, sed natura semper errans a boni definitione principii tamquam aliquo signo optimae figurae inpressa componitur et ex illo erroris fluctu retinetur. Nam nimiam cupiditatem iraeque immodicam effrenationem quasi quidam rector animus pura intellegentia roboratus adstringit, et has quodammodo inaequalitatis formas temperata bonitate constituit. Hoc autem erit perspicuum, si intellegamus, omnes inaequalitatis species ab aequalitatis crevisse primordiis, ut ipsa quodammodo aequalitas matris et radicis obtinens vim ipsa omnes inaequalitatis species ordinesque profundat. Sint enim nobis tres aequales termini, id est tres unitates, vel ter bini vel ter terni vel ter quaterni vel quantos ultra libet ponere. Quod enim in unis tribus terminus evenit, idem contingit in ceteris. Ex his igitur secundum praecepti nostri ordinem videas primum nasci multiplices et in his duplices prius, dehinc triplos, inde quadruplos et ad eundem ordinem consequentes. Rursus multiplices si convertantur, ex his superparticulares orientur, et ex duplicibus quidem sesquialteri ex triplis sesquitercii, ex quadruplis sesquiquarti et ceteri in hunc modum. Ex superparticularibus vero conversis superpartientes nasci necesse est, ita ut ex sesquialtero nascatur superbipartiens, supertripartientem sesquitercius gignat et ex sesquiquarto superquadripartiensi procreetur. Rectis autem positis neque conversis prioribus superparticularibus multiplices superparticulares orientur; rectis vero superpartientibus multiplices superpartientes efficiuntur. Praecepta autem tria haec sunt, ut primum numerum primo facias parem, secundum vero primo et secundo, tertium primo, secundis duobus et tertio. Hoc igitur cum in terminis aequalibus feceris, ex his qui nascentur, duplices erunt, de quibus duplicibus si idem feceris, triplices procreantur et de his quadruplices atque in infinitum omnes formas numeri multiplicis explicabit. Iaceant igitur tres termini aequales.

j j j

Ponatur itaque primo primus aequalis, id est unus, secundus vero primo et secundo, id est ij, tertius vero primo, duobus secundis et tertio par sit, id est uni et duobus unis et uni, quod sunt iij ut est descriptio.

j iij

Videsne ut duplici proportione sequens ordo texatur? Fac rursus idem de duplicibus, ut sit primus primo aequalis, id est uni, secundus primo et secundo, id est uni et duobus, qui sunt tres, tertius primo, id est uni, duobus secundis, id est iij, et tertio, id est iij, qui simul viij fiunt, et venit haec formula.

j iij

ij iiij

Rursus si triplicibus idem feceris, continuus quadruplus procreabitur. Sit enim primus primo aequus, id est unus, sit secundus primo et secundo aequalis, id est iij, sit tertius primo, duobus secundis et tertio aequalis, id est xvj.

j iij

ij iiij

iiij vj

Et in ceteris quidem ad hanc formam tribus his praeceptis utemur. Si vero qui ex aequalibus nati sunt multiplices, eos disponamus et secundum haec praecepta vertamus, ita ut converso sint ordine, sesquialter ex duplici procreabitur, sesquitercius ex triplici, sesquiquartus ex quadruplo. Sint enim iij duplices termini, qui ex aequalibus creati sunt, et qui ultimus est, primus ponatur hoc modo:

iiij ij j

Et constituatur primo in hoc ordine primus par, id est iij, secundus vero primo et secundo par, id est vj, tertius vero primo, duobus secundis et tertio, id est viiij.

iiij j

iiij j iiij

Ecce tibi illa sesquialtera quantitas ex termino duplicitatis exoritur. Videamus nunc ad eundem modum, ex triplici qui nascatur. Disponantur enim triplices superiores

viiij iiij j

Converso scilicet ordine, sicut duplex, hic est quoque ordo dispositus. Ponatur ergo primus primo aequus, id est viiij, secundus primo et secundo, id est xij, tertius primo, duobus secundis et tertio aequus, id est xvj.

iiij ij

iiij ij vj

Rursus secunda species superparticularis numeri, id est sesquitercius procreatus est. Quod si idem de quadruplo quis facere velit, sesquiquartus continuo nascetur, ut subiecta monstrat descriptio.

vj iij

vj x xv

Ac si quis idem de cunctis in infinitum partibus multiplicatis faciat, convenienter ordinem superparticularitatis inveniet. Quod si conversos superparticulares aliquis secundum haec praecepta convertat, continuo videat superpartientes ad crescere et ex sesquialtero quidem superbipartiens, ex sesquitercio supertripartiens procreatur et ceteri secundum communes denominationis species sine ulla ordinis interpolatione nascentur. Disponantur igitur sic:

viiiij vj iiiij

Superioris igitur descriptionis primo primus aequus numerus adscribatur, id est viiiij secundus vero primo et secundo, id est xv, tertius vero primo, duobus secundis et tertio, id est xxv.

iiiij j iij

iiiij v xv

Si vero sesquitercium eodem modo vertamus, ordo supertripartiens invenitur. Sit enim prima positio sesquitercii

xvj xij xiiiij

Ponatur secundum priorem modum primo primus par, id est xvj, secundus primo et secundo, id est xxviiiij, tertius primo, duobus secundis et tertio, id est xlviiiij. Omnis ergo summa disposita supertripartientes efficit.

vj ij iiiij

vj xviiij lviiiij

Rursus si sesquiquartum eodem modo verteris, superquadripartiens statim quantitas procreabitur, ut est ea forma, quam subpositam vides.

xv x vj

xv lv xxxj

Restat, quemadmodum ex superparticularibus et superpartientibus multiplices superparticulares vel multiplices superpartientes nascentur ostendere, quorum binas tantum faciam descriptiones. Namque si rectum et non conversum sesquialterum ponimus, duplex superparticularis excrescit. Sit enim hoc modo:

iiiij vj viiiij

Ponatur secundum superiorem modum primo primus aequalis, id est iiiij, secundus primo et secundo, id est x, tertius primo, duobus secundis et tertio aequalis, id est xxv.

iiij j iiij

iiij xv

Atque haec quidem duplex sesquialtera summa producta est; si vero sesquitertium non conversum ponamus duplex sesquitertius invenitur, ut subiecta descriptio docet:

iiij ij vj

iiij xj lviiij

At vero si ad superpartientes animum convertamus eosque ordinatim secundum superiora praecepta disponamus, multiplices superpartientes ordinatim progenitos reperiemus. Disponatur enim superpartientis haec formula:

viiiij xv xxv

Adscribatur ergo primus primo aequus, id est viiiij, secundus primo et secundo, id est xxiiiij, tertius primo, duobus secundis et tertio, id est lxiiiij.

iiij v xv

iiij xiiiij xviiiij

Videsne, ut ex superbipartiente duplus superbipartiens exortus sit? At vero si supertripartientem ponam, duplex sine dubio supertripartiens invenitur, ut in subiecta descriptione perspicuum est.

vj xviiij lviiiij

vj liiiij xxj

Sic ergo de superparticularibus vel de superpartientibus multiplices superparticulares vel multiplices superpartientes oriuntur. Quare constat, omnium inaequalitatum aequalitatem esse principium. Ex eadem enim inaequalia cuncta nascuntur. Ac de his quidem hactenus disserendum esse credidimus, ne vel infinita sectemur, vel circa res obscurissimas ingredientium animos detinentes ab utilioribus moraremur.

Liber primus explicit.

Liber Secundus

Quemadmodum ad aequalitatem omnis inaequalitas reducatur

Superioris libri disputatione digestum est, quemadmodum tota inaequalitatis substantia a principe sui generis aequalitate processerit. Sed quae rerum elementa sunt, ex hisdem principaliter omnia componuntur, et in eadem rursus resolutione facta solvuntur; ut, quoniam articularis vocis elementa sunt litterae, ab eis est syllabarum progressa coniunctio et in easdem rursus terminatur extremas; eandemque vim obtinet sonus in musicis. Iam vero mundum corpora quattuor non ignoramus efficere; namque ut ait: Ex imbri, terra atque anima gignuntur et igni. Sed in haec rursus eius quattuor elementa fit postrema solutio. Ita igitur, quoniam ex aequalitatis margine cunctas inaequalitatis species proficisci videmus, omnis a nobis inaequalitas ad aequalitatem velut ad quoddam elementum proprii generis resolvatur. Hoc autem trina rursus imperatione colligitur, eaque resolvendi ars datis quibuslibet tribus terminis inaequalibus quidem sed proportionaliter constitutis, id est ut eandem medius ad primum vim proportionis obtineat, quam qui est extremus, ad medium, in qualibet inaequalitatis ratione vel in multiplicibus, vel in superparticularibus, vel in superpartientibus, vel in his, qui ex his procreantur multiplicibus superparticularibus, vel multiplicibus superpartientibus, eadem atque una ratione indubitata constabit. Propositis enim tribus, ut dictum est, terminis aequis proportionibus ordinatis ultimum semper medio detrahimus et ipsum quidem ultimum primum terminum conlocemus, quod de medio relinquatur, secundum. De tertia vero propositorum terminorum summa auferemus unum primum et duos secundos, eos, qui de medietate relictis sunt, et id quod ex tertia summa relinquatur, tertium terminum constituemus. Videbis igitur hoc facto in minorem modum summas reverti et ad principaliorem habitudinem comparationes proportionalesque reduci, ut si sit quadrupla proportio, primo ad triplam, inde ad duplam, inde ad aequalitatem usque remeare; et si sit superparticularis sesquiquartus, primo ad sesquitercium, inde ad sesquialterum, postremo ad tres aequales terminos redire. Hoc autem nos exempli gratia in multiplici tantum proportione docebimus, sollertem vero in aliis quoque inaequalitatis speciebus id experientem eadem ratio praeceptorum iuvabit. Constituantur enim tres a se termini quadrupli.

viiij xxxij cxxviiij

Aufer igitur ex medio minorem, id est ex triginta duobus octonarium, relinquuntur xxiiij et primum octonarium terminum pone, secundum vero, quod relictum fuerit ex medio, id est xxiiij, ut sint hi duo termini viij et xxiiij. De tertio vero, id est cxxviiij, aufer unum primum id est viij et duos secundos, qui sunt reliqui, id est bis xxiiij et relinquuntur lxxij. His dispositis terminis ex quadrupla propinquior aequitati proportio tripla redacta est. Sunt enim hi termini: viij xxiiij lxxij. Ex his autem ipsis idem si feceris, ad duplam rursus comparatio remeabit. Pone enim primum minori aequum, id est viij, et ex secundo aufer primum, xvj relinquuntur; sed ex tertio, id est ex lxxij, aufer primum, id est viij et duos secundos, id est bis xvj, et erit reliqua pars xxxij, quibus positus ad duplas proportionales habitudo redigitur: viij xvj xxxij. Idem vero ex his si fiat rem omnem ad aequitatis summas eliquabimus. Pone enim primum minori aequum, id est viij; et aufer ex xvj octonarium, remanent viij, quibus positus ex tertio, id est xxxij, sumptis primo, id est viij et duobus secundis, id est octonariis, supersunt viij; quibus dispositis prima nobis aequitas cadit, ut subiectae summulae docent

viij viij viij

Hinc igitur si quis ad alias inaequalitatis species animum tendat, eandem convenientiam intubanter inveniet. Quare pronuntiandum est, nec ulla trepidatione dubitandum, quod quemadmodum per se constantis quantitatis unitas principium et elementum est, ita et ad aliquid relatae quantitatis aequalitas mater est. Demonstravimus enim, quod hinc et eius procreatio prima foret et in eam rursus postrema solutio.

De inveniendis in unoquoque numero quot numeros eiusdem proportionis possit praecedere eorumque descriptio descriptionisque expositio.

Est autem quaedam in hac re profunda et miranda speculatio et ut ait Nicomachus enmusotaton theorema proficiens et ad Platoniam in Timaeo animae generationem et ad intervalla armonicae disciplinae. Ibi enim iubemur producere atque extendere tres vel quattuor sesquialteros vel quotlibet sesquitercias proportionem et sesquiquartas comparationes easque secundum propositum ordinem saepe continuas iubemur extendere. Ne autem hoc labore quodam, semper quidem maximo, frequentius inferaci fiat, hac nobis ratione in quot numeris quanti possint esse superparticulares vestigandum est.

Omnes enim multiplices tantarum similium sibimet proportionum principes erunt, quoto ipsi loco ab unitate discesserint. Quod autem dico sibimet similium, tale est, ut dupli semper multiplicitas, ut superius destinatum est, sesquialteros creet et dux sit triplex sesquitercium, quadruplus sesquiquartus. Primus ergo duplex unum solum habebit sesquialterum, secundus duo, tertius tres, quartus quattuor et secundum hunc ordinem eadem fit in infinitum progressio, neque unquam fieri potest, ut vel superet proportionum numerum vel ab eo sit deminutio aequabilis ab unitate locatio. Primus ergo duplex est binarius numerus, qui unum solum sesquialterum recipit, id est ternarium, binarius enim contra ternarium comparatus sesquialteram efficit proportionem. Ternarius vero quoniam medietatem non recipit, non est alter numerus, ad quem in ratione sesquialtera comparetur. Quaternarius vero numerus secundus duplus est. Hic ergo duos sesquialteros praecedat. Est enim ad ipsum quidem comparatus senarius numerus, ad senarium vero, quoniam medietatem habet, novenarius, et sunt duo sesquialteri, ad iiiij scilicet vj, ad vj vero viiij; novenarius vero, quoniam medietate caret, ab hac comparatione seclusus est. Tertius vero duplex est viiij. Hic ergo tres sesquialteros antecedit. Comparatur enim ad ipsum duodenarius numerus, ad duodenarium xviiij, ad xviiij rursus xxvij. At vero xxvij medio caret. Idem quoque in sequentibus evenire necesse est, quod nos cum propria ordinatione subdidimus. Semper enim hoc divina quadam nec humana constitutione speculationibus occurrit, ut quotienscunque ultimus numerus invenitur, qui loco duplicis ab unitate sit par, talis sit, ut in medietates dividi secarique non possit.

j	iiij	viiij	xviiij	xxxvij	2
	ij	j	xiiiiij	lviij	2
	iiiij	viij	xxvij	xxij	1
		xviij	iiiiij	viij	(
			xxxj	lxij	(
				cxliij	(

Idem contingit etiam in triplicibus. Ex illis enim sesquitercia procreantur. Nam quoniam primus triplex est ternarius numerus, habet unum sesquitercium, id est iiiij, cuius quaternarii tertia pars non potest inveniri. Atque ideo hic epitrilo caret. Secundus vero, qui est viiij, habet ad se duodenarium numerum sesquitercium, duodenarius autem, quoniam habet tertiam partem, in sesquitercia proportione comparatur ad eum numerus xvj, qui tertiae partis sectione solutus est xxvij autem, quoniam tertius est triplex, habet ad se sesquitercium xxxvij et hic rursus ad xlviij eadem proportione comparatur. Cui si lxiiii appositus fuerint, eandem rursus vim proportionis explebunt, quos lxiiii ad nullum sesquitercium rursus aptabis, quoniam parte tertia non tenentur. Atque hoc in cunctis triplicibus invenitur, ut extremus eiusdem proportionis numerus tantos ante se praecedentes habeat, quanto primus eorum ab unitate discesserit et qui tot super se eiusdem proportionis habuerit numeros, quotus ab unitate primus eorum iacet. Eius pars, qua illi comparatus numerus possit eandem facere proportionem, inveniri nequeat. Et triplicis quidem haec est descriptio.

ij	iiij	xvij	xxxj	liij	
					ccc
iiij	ij	xxvj	viiij	xxiiij	
					ccc
	vj	lviiij	xlviij	cxxxij	
					dlx
		xliij	xciiij	xvj	
					dcc
			clvj	lxviiij	
					mx
				xliij	

At quadrupli secundum hanc formam descriptio est, ad quam scilicet, qui a prioribus instructus accesserit, nulla ratione trepidabit. Et de ceteris quidem multiplicibus eandem convenientiam pernotabis.

				(mx
iiij	vj	xliij	clvj	iiij	
				(mcc
	x	xxx	ccxx	lxxx	
				(mdc
	xv		ccc		
				(mm
		xxv			
				(mm
			cxxv	d	
					mm
					mcxxv

Hinc quoque perspicuum est superparticularium, quemadmodum prius ostensum est, primos esse multiplices, si quidem duplices sesquialteros, triplices sesquitercios et cuncti multiplices cunctos in ordinem superparticulares creant. Est etiam in his quoque mirabile. Namque ubi prima latitudo fuerit duplex, et sub eisdem qui sunt versus continui alternatim positi secundum seriem latitudinis duplices erunt. Si vero fuerint triplices et inferiores ordines tripla se in suis terminis multiplicatione superabunt; at in quadrupla quadrupli atque hoc in infinita ductum speculatione non fallit. Angulares autem omnium multiplices evenire necesse est. Erunt autem duplicium quidem triplices, triplicium quadruplices, quadruplorum vero quincupli et secundum eandem ordinis incommutabilem rationem sibimet cuncta consentient. Quibus expositis ad sequentem operis seriem competens disputatio convertatur.

Quod multiplex intervallum ex quibus superparticularibus medietate posita intervallis fiat eiusque inveniendi regula.

Si igitur duae primae superparticularis species coniungantur, prima species multiplicationis exoritur. Omnis enim duplex ex sesquialtero sesquitercioque componitur et omnis sesquialter et sesquitercius duplicem iungunt. Nam ternarius sesquialter est duorum, quattuor vero sesquitercius ternarii, sed iiij duplus duorum.

Sic igitur sesquialter et sesquitercius unum duplicem componunt. At vero si fuerint medietas et duplus, inter duplicem et medium potest una medietas talis inveniri, quae ad alteram extremitatem sesquialtera sit, ad alteram sesquitercia. Altrinsecus enim positus senario et ternario, id est duplici et medietate, si quaternarius in medio conlocetur, ad ternarium numerum sesquiterciam continet rationem, ad senarium vero sesquialteram.

Recte igitur dictum est, et duplicem a sesquialtero sesquitertioque coniungi et has duas superparticularis species duplicem procreare, id est primam speciem multiplicis quantitatis. Rursus ex prima multiplicis specie id est ex duplici et prima superparticularis id est sesquialtera, continens multiplicis species id est tripla coniungitur. Namque xij senarii numeri duplus est, x vero et viij ad duodenarium sesquialter, qui ad senarium numerum triplus est.

Et si positus eisdem vj et xvij novenarius numerus in medietate ponatur, erit ad senarium sesquialter, qui ad xvij duplus est, et ad senarium xvij triplus est.

Ex duplici igitur et sesquialtero triplex ratio proportionis exoritur, et in eas rursus resolutione facta revocatur. Si autem hic, id est triplus numerus, qui est species secunda multiplicis, secundae speciei superparticularis aptetur, quadrupli continuo forma contexitur. Et in easdem rursus partes naturali partitione solvetur secundum modum, quem superius demonstravimus. Si vero quadruplus sese ac sesquiquartus adglomerent, quincuplus continuo fiet, et si quincuplus cum sesquiquinto, mox sescupli proportio coniugabitur, atque ita secundum hanc progressionem cunctae multiplicis species sine ulla rati ordinis permutatione nascentur, ita ut duplus cum sesquialtero triplicem creet, triplus cum sesquitercio quadruplum, quadruplus eum sesquiquarto quincuplum et eodem modo, ut nullus hanc continuationem finis inpediat.

De per se constante quantitate, quae in figuris geometricis consideratur; in quo communis ratio omnium magnitudinum.

Haec quidem de quantitate, quam secundum ad aliquid speculamur, ad praesens dicta sufficient. Nunc autem in hac sequentia quaedam de ea quantitate, quae per se ipsam constat, neque ad aliquid refertur, expediam, quae nobis ad ea prodesse possint, quae post haec rursus de relata ad aliquid quantitate tractabimus. Amat enim quodammodo matheseos speculatio alterna probationum ratione constitui. Nunc autem nobis de his numeris sermo futurus est, qui circa figuras geometricas et earum spatia dimensionesque versantur, id est de linearibus numeris et de triangularibus vel quadratis ceterisque, quos sola pandit plana demensio, nec non de inaequali laterum compositione coniunctis; de solidis etiam, id est cybis et sphericis vel pyramidis, laterculis etiam vel tignulis et cuneis, quae omnia quidem geometricae propriae considerationis sunt, sed sicut ipsa geometriae scientia ab arithmetica velut quadam radice ac matre producta est, ita etiam eius figurarum semina in primis numeris invenimus, planum siquidem fecimus, quod omnes disciplinas haec interempta consumeret, quas minime constituta firmaret. Hoc autem cognoscendum est, quod haec signa numerorum, quae posita sunt, quae nunc quoque homines in summarum designatione describunt, non naturali institutione formata sunt. Ut enim quinarii subiectam notulam fingant de v, vel denarii, quam descripsimus, id est de x, et alias huiusmodi non natura posuit, sed usus adfinxit. Quinque enim unos, vel decem vel quotlibet alios illis notulis pro compendio notare voluerunt, ne, quot unitates quis monstrare vellet, totiens ei virgulae ducerentur. Nos autem, quotienscunque aliquid monstrare volumus, in his praesertim formulis, ordinarum virgularum multitudinem non gravamur apponere. Cum enim quinque volumus demonstrare, facimus quinque virgulas ducimusque eas hoc modo iij et cum septem, totidem, et cum decem, nihilo minus, quia naturalius est quemlibet numerum, quantas in se retinet, tot unitatibus adsignare quam notulis. Est igitur unitas vicem obtinens puncti, intervalli longitudinisque principium; ipsa vero nec intervalli nec longitudinis capax, quemadmodum punctum principium quidem lineae est atque intervalli, ipsum vero nec intervallum nec linea. Neque enim punctum puncto superpositum ullum efficit intervallum, velut si nihil nulli iungas. Nihil enim est, quod ex nullorum procreatione nascatur. Eadem quippe etiam circa aequalitates proportio manet. Nam si quotlibet fuerint termini pares, tantum quidem est a primo ad secundum, quantum a secundo ad tertium, sed inter primum et secundum vel secundum et tertium nulla est intervalli longitudo vel spatium. Si enim tres senarios ponas, hoc modo: vj vj vj quemadmodum primus est ad secundum, sic est secundus ad tertium, sed inter primum et secundum nihil interest. VI enim et vj nulla spatii intervalla disiungunt. Ita etiam unitas in se ipsa multiplicata nihil procreat. Semel enim unum nihil aliud ex se gignit, quam ipsa est. Nam quod intervallo caret, etiam vim gignendi intervalla non recipit, quod in aliis numeris non videtur evenire. Omnis enim numerus in se ipsum multiplicatus alium quendam efficit maiorem, quam ipse est, idcirco, quoniam intervalla multiplicata maiore sese spatii prolixitate distendunt. Id vero, quod sine intervallo est, plus quam ipsa est pariendi non habet potestatem. Ex hoc igitur principio, id est ex unitate, prima omnium longitudo succrescit, quae a binarii numeri principio in cunctos sese numeros explicat, quoniam primum intervallum linea est. Duo vero intervalla sunt longitudo et latitudo, id est linea et superficies. Tria vero intervalla sunt: longitudo, latitudo, altitudo, id est linea, superficies atque soliditas. Praeter haec autem

alia intervalla inveniri non possunt. Aut enim unum intervallum erit, quod longitudo est, aut aliquid duobus intervallis expositum est, ut si qua res longitudinem habeat et latitudinem, vel trina intervalli demensione porrigitur, si longitudine altitudine latitudineque censetur; supra quae adeo nihil inveniri potest, ut ipsorum vj motuum formae ad intervallorum naturas et numerum componantur. Unum enim intervallum duos in se continet motus, ut in tribus intervallis sex sese motuum summa conficiat hoc modo: Est enim in longitudine ante et retro, in latitudine sinistra et dextera, in altitudine sursum ac deorsum. Necesse est autem, ut quicquid fuerit solidum corpus, hoc habeat longitudinem latitudinemque et altitudinem, et quicquid haec tria in se continet, illud suo nomine solidum vocetur. Haec enim tria circa omne corpus inseparabili coniunctione versantur, et in natura corporum constituta sunt. Quare quicquid uno intervallo caret, illud corpus solidum non est. Nam quod duo sola intervalla retinet, illud superficies appellatur. Omnis enim superficies sola longitudine et latitudine continetur. Et hic eadem illa conversio remanet. Omne enim quod superficies est, longitudinem et latitudinem retinet, et quod haec retinet, illud est superficies. Haec autem superficies uno tantum intervallo solidi corporis demensione superatur, quae uno rursus intervallo lineam vincit, quae longitudinis naturam retinens latitudinis expers est; quae linea, quod unius est intervalli sortita naturam, a superficie uno intervallo, a soliditate duobus spatiis vincitur. Punctum igitur alio rursus intervallo a linea vincitur, ipsa scilicet, quae reliqua est, longitudine. Quare si punctum uno quidem intervallo a linea supergreditur, idem a superficie vincitur duobus, tribus vero intervalli demensionibus a soliditate relinquitur, constat punctum ipsum sine ulla corporis magnitudine vel intervalli demensione, cum et longitudinis et latitudinis et profunditatis expers sit, omnium intervallorum esse principium et natura insecabile, quod Graeci atomon vocant, id est ita deminutum atque parvissimum, ut eius pars inveniri non possit. Est igitur punctum primi intervalli principium, non tamen intervallum, et lineae caput, sed nondum linea, sicut linea quoque superficiei principium est, sed ipsa superficies non est, et secundi intervalli caput est, secundum tamen intervallum ipsa non retinet. Idem quoque et in superficiei rationem cadit, quae et ipsa solidi corporis et triplicis intervalli naturale sortitur initium, ipsa vero nec trina intervalli demensione distenditur, nec ulla crassitudine solidatur.

De numero lineari

Sic etiam in numero unitas quidem, cum ipsa linearis numerus non sit, in longitudinem tamen distenti numeri principium est, et linearis numerus, cum ipse totius latitudinis expers sit, in aliud tamen spatium latitudinis extenti numeri sortitur initium. Superficies quoque numerorum, cum ipsa solidum corpus non sit, additi tamen latitudini solidi corporis caput est. Hoc autem planius his exemplis liquebit. Linearis numerus est a duobus inchoans adiecta semper unitate in unum eundemque ductum quantitatis explicata congeries, ut est id, quod subiecimus.

ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij ij

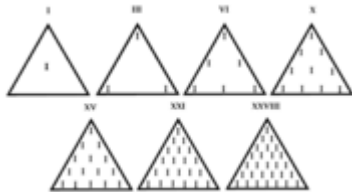
De planis rectilineis figuris, quodque earum triangulum principium sit



Figurae de quattor modi ut polygona varas in triangulis resolviatur

Plana vero superficies in numeris invenitur, quotiens a tribus inchoatione facta addita descriptionis latitudine insequentium se naturalium numerorum multitudine anguli dilatantur, ut sit primus triangulus numerus, secundus quadratus, tertius qui sub quinque angulis continetur, quem pentagonum Graeci nominant, quartus exagonus, id est qui sex angulis includitur et ceteri eodem modo singillatim per naturalem numerum angulos augeant in plana scilicet descriptione figurarum. Hi vero idcirco a ternario numero inchoant, quod latitudinis et superficiei solus ternarius principium est. In geometria quoque idem planius invenitur. Duae enim lineae rectae spatium non continent. Et omnis triangularis figura vel tetragoni vel pentagoni vel exagoni vel cuiuslibet, qui pluribus angulis continetur, si a medietate per singulos angulos lineae producantur, tot eum dividunt trianguli, quot ipsam figuram angulos habere contigerit. Quadratum enim ita ductae lineae in quattuor, pentagonum in quinque triangulos, exagonum in sex et ceteros in suorum angulorum modo mensuraque per triangulos partiuntur, ut est subiecta descriptio: quadratus in quattuor triangulos divisus, pentagonus in v triangulos divisus, exagonus in sex triangulos divisus. At vero triangula figura, cum eam quis ita dividerit, in alias figuras non resolvitur, nisi in se ipsam. In tria enim triangula dissipatur. Triangulus in tres triangulos divisus. Adeo haec figura princeps est latitudinis, ut ceterae omnes superficies in hanc resolvantur, ipsa vero, quoniam nullis est principiis obnoxia neque ab alia latitudine sumpsit initium, in sese ipsam solvatur. Idem autem et in numeris fieri, sequens operis ordo monstrabit.

Dispositio triangulorum numerorum



Dispositio triangulorum numerorum

Est igitur primus triangulus numerus, qui in solis tribus unitatibus dissipatur secundum superficiei positionem, triangula scilicet descriptione, et post hunc quicumque aequalitatem laterum in trina laterum spatia segregant.

De lateribus triangulorum numerorum.

Ad hunc modum infinita progressio est, omnesque ex ordine trianguli aequilateri procreabuntur, primum omnium ponenti quod ex unitate nascitur ut haec vi sua triangulus sit, non tamen etiam opere atque actu. Nam si cunctorum mater est numerorum, quicquid in his, quae ab ea nascuntur, numeris invenitur, necesse est ut ipsa naturali quadam potestate contineat. Et huius trianguli latus est unitas. Ternarius vero, qui primus est opere et actu ipso triangulus, crescente unitate binarium numerum latus habebit. Vi enim et potestate primi trianguli, id est unitatis, unitas latus est, actu vero et opere trianguli primi, id est ternarii, dualitas, quam Graeci dyada vocant. Secundi vero trianguli, qui opere atque actu secundus est, id est senarii, crescente naturali numero in lateribus ternarius invenitur; tertii vero, id est denarii, quaternarius latus continet; quarti vero, id est xv, quinarius latus tenet, et quinti senarius idemque est usque in infinitum.

De generatione triangulorum numerorum

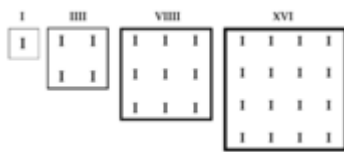
Nascuntur autem trianguli disposita naturali quantitate numerorum, si prioribus semper multitudo sequentium congregetur. Disponatur enim naturalis numerus hoc modo:

j ij iij v vj vij viij viiij

Ex his igitur si primum sumam, id est unitatem, habeo primum triangulum, qui est vi et potestate, nondum etiam actu nec opere. Huic si secundum adgregaero, qui in naturali numerorum dispositione descriptus est, id est binarium, primus mihi triangulus opere et actu nascitur, id est ternarius. Si vero huic tertium ex naturali numero adiecero, secundus mihi opere et actu triangulus procreatur. Super unum enim et duo si tertium, id est ternarium adgregaero, senarius extenditur, secundus scilicet triangulus. Huic vero si consequentem quaternarium superposuero, denarius explicatur, qui est tertius actu triangulus, quos per latera disponens ad superioris descriptionis exemplar cunctos triangulos numeros sine ullius dubitationis erroribus pernotabis. Et quantas ultimus numerus in se unitates habet, quem superioribus adgregabis, tot ipse, qui fit triangulus, unitates habebit in latere. Nam ternarium, qui est primus actu triangulus, adiecto binario unitati feceramus; et hic duos habet in latere. Et senarium his adiecta ternarii quantitate produximus, cuius latus soli tres continent; et idem in aliis cunctis, quot unitates habentem numerum superioribus adgregabis, tot unitatibus eius latera continebuntur.

De quadratis numeris

Quadratus vero numerus est, qui etiam ipse quidem latitudinem pandit, sed non tribus angulis ut superior forma, sed quattuor ipse quoque aequali laterum demensione porrigitur. Sunt autem huius modi:



Numeri quadrati

De eorum lateribus

Sed in his quoque secundum naturalem numerum laterum augmenta succrescunt. Primus enim vi et potentia quadratus, id est unitas, unum habet in latere; secundus vero, qui actu primus est, id est quattuor, duobus per latera positus continetur; tertius vero, id est viiij, qui secundus est opere, tribus in latere positus adgregatur. Et ad eandem sequentiam cuncti procedunt.

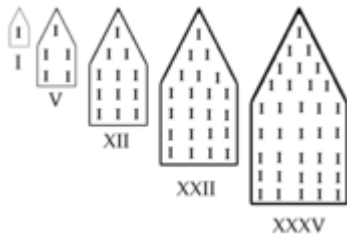
De quadratorum numerorum generatione rursusque de eorum lateribus

Nascuntur autem tales numeri ex naturalis numeri dispositione, non quemadmodum superiores trianguli, ut ordinatis ad se invicem numeris congregentur, sed uno semper intermisso, qui sequitur, si cum superiore vel superioribus colligatur, ordinatos ex se quadratos efficient. Disponatur enim numerus naturalis hoc modo:

j ij iij iiij v vj vij viij viiij x xj

Ex his igitur si unum respiciam, primus mihi natus est potestate quadratus. Quod si uno relicto priori tertium iunxero secundus mihi quadratus efficitur. Nam si uni relicto binario ternarium adposuero, quaternarius mihi quadratus exoritur. Quod si rursus relicto medio quaternario quinarium similiter adgregaero, quadratus mihi tertius, id est novenarius, procreatur. Unus enim et iij et v viiij colligunt. At vero si his intermisso senario septenarium iungam tota in sedecim summa concrescit, id est quarti quadrati numerositas. Et ut breviter huius forma procreationis appareat, si cuncti inpares sibimet adponantur conlocato scilicet naturali numero, quadratorum ordo texetur. Est etiam in his haec naturae subtilitas et inmutabilis ordinatio, quod tot unitates unusquisque quadratorum retinebit in latere, quanti fuerint numeri ad coniunctionem propriam congregati. Nam in primo quadrato, quoniam ex uno fit, unus est in latere, in secundo, id est quaternario, quoniam ex uno et tribus procreatur, qui duo sunt termini, binario latus texitur. Et in novenario, quoniam tribus numeris procreatur, latus ternario continetur, atque idem in aliis videre licet.

De pentagonis eorumque lateribus



Numeri pentagones

Pentagonus vero numerus est, qui ipse quidem in latitudinem secundum unitatem descriptis quinque angulis continetur. Cunctis scilicet lateribus aequali demensione dispositis. Sunt autem hi j v xij $xxij$ $xxxv$ lj lxx . Eodem quoque modo eorum latera succrescunt. Nam primi potestate pentagoni, id est unius, idem unus spatium lateris tenet, secundi vero quinary, qui est actu ipso atque opere primus pentagonus, bini per latera fixi sunt; tertius vero, id est xij , tribus in latus auctus est; quartus $xxij$ quattuor numerorum in latere quantitate distenditur; atque idem in ceteris secundum unitatis progressionem. In naturali scilicet numero secundum superiorum figurarum incrementa tenduntur.

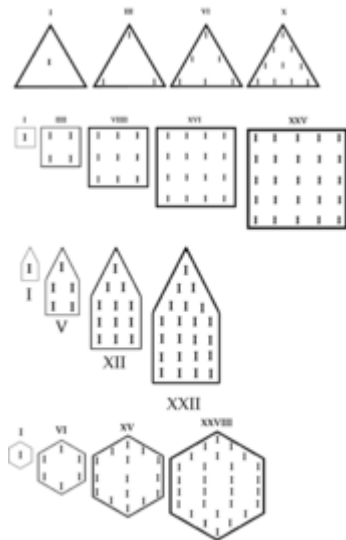
De generatione pentagonorum.

Nascuntur autem hi numeri, qui extensi in latitudinem v angulos pandunt, ab eadem naturalis numeri quantitate in se coacervata, ita ut duobus semper interiectis numeris superiori vel superioribus vincens ternario eum, cui iungendus est, adgregetur. Namque unitati intermissis duobus et tribus si $iiij$ iungas, qui tribus ipsam superant unitatem, quinary pentagonus procreabitur. Post $iiij$ vero si intermisso quinary et senario septem adreges, duodenarium pentagonum procreabis. Namque unus et $iiij$ et vij numeri xij explebunt. Hoc etiam in aliis fiet. Nam si x vel $xiiij$ vel xvj vel $xviiiij$ vel $xxij$ vel xxv superioribus cunctis adiunxeris, eodem quo superioris modo pentagoni fiet, secundum superiorem descriptionem: $xxij$ $xxxv$ lj lxx $xcij$ $cxvij$.

De exagonis eorumque generationibus.

Exagoni autem, qui sex angulis, et eptagoni, qui vij rursus lateribus continentur, secundum hunc modum eorum laterum augmenta succrescunt. Namque in trianguli numeri natura procreationeque ipsos numeros iungebamus qui sese in naturali dispositione sequerentur et se tantum unitate transirent. Quadrati vero numeri, id est tetragoni, procreatio fiebat ex numeris, qui uno intermisso copulabantur, cum se binario superarent. Pentagoni vero natura fuit ex duobus interpositis relictisque, qui se ternario vincerent. Secundum talia quoque augmenta exagonorum vel eptagonorum vel octogonorum vel novem laterum figura vel x quotlibet aliorum competenti progressionem conficitur. Ut enim in pentagono duobus intermissis eos iungebamus, qui se ternario superarent, nunc in exagono tribus intermissis eos iungemus, qui se quaternario transeant, et erunt quidem eorum radices et fundamenta, ex quibus iunctis omnes exagoni nascuntur: j v $viiiij$ $xiiij$ $xvij$ xxj et ad eundem ordinem consequentes. Atque ab his sex angulorum formae nascuntur: j vj xv $xxviiiij$ $xlvi$ $lxvij$ quos ad superiorem modum scilicet descriptos in propriis ordinibus pernotabis.

De eptagonis eorumque generationibus et communis omnium figurarum inveniendae generationis regula descriptionesque figurarum



Numeri trianguli, quadrati, pentagoni, eptagonique.

Septem vero angulorum figura est, cum ad eundem ordinem progressionis uno plus quam in sexangulorum figura numero intermisso superiori coniunxeris. Nam si quattuor interpositis, qui se quinario vincant, adgregaveris, eptagoni continuo figura nascetur, ut hi numeri sint eorum radices et, ut superius dictum est, fundamenta: j vj xj xvj xxj. Qui vero ex his constant, hi sunt: j vij xvij xxxiiij lv. Novem vero angulorum secundum eundem ordinem forma procreatur ita, ut secundum aequalem progressionem primi quoque eorum numeri distent. Nam in triangulo qui sunt numeri, quae prima superficiei figura est, uno sese tantum numeri praecedunt, qui scilicet, eorum naturam descriptionemque perficiunt; in tetragono vero, qui secundus est, duobus sese iuncti numeri vincunt, et in pentagono tribus et in exagono iijj et in eptagono quinque, huiusque rei nullus est modus. Hoc autem nos subiectarum formarum descriptiones docebunt.

Descriptio figurarum numerorum in ordine

Similiter autem licebit et aliarum formarum, quae pluribus angulis continentur quantitates adscribere. Sed quoniam facilius oculis subiecta retinentur supradictarum formarum numerositas in subteriore descriptione ponatur.

Tri										
anguli	ij	j	x	v	xj	xvij	xxvj	xliv	v	l
Qu										
adrati	ijj	iiij	vj	xv	xvj	lviiij	xiiiij	xj		lxx
Pen										
tagoni	ij	xij	xxv	j	xx	cij	vij	xliv		cx
Exa										
goni	j	v	xvij	lv	xvj	cj	xx	j		clii
Ept										
agoni	ij	viiij	xxiiij	v	xxxj	xij	xlviij	xxviij		clx
										cxxxv

Qui figurati numeri ex quibus figuratis numeris fiant, inque eo quod triangulus numerus omnium reliquorum principium sit.

His igitur ita sese habentibus quid in hac re sit consequens vestigemus. Omnes enim tetragoni, qui sub triangulis sunt naturali ordinatione dispositi, ex superioribus triangulis procreantur illorumque collectione quadrati figura componitur. Quattuor enim tetragonus fit ex uno et tribus, id est ex duobus superioribus triangulis; novenarius vero ex tribus et sex, sed utriusque sunt trianguli; at xvj ex decem et sex; et xxv ex x et xv. Idemque in sequenti ordine quadratorum constans atque inmutabile reperitur. Pentagonorum vero summae conficiuntur ex uno super se tetragono et altrinsecus triangulo constituto. Nam quinquarius pentagonus ex quaternario super se posito tetragono et ex uno, qui in triangulorum ordine ponitur, adgregatur. xij vero pentagonus ex novenario super se quadrato et tribus, secundo triangulo, nascitur. XXII vero ex xvj et vj, quadrato scilicet atque triangulo; et xxxv ex xxv et x. Et in ordinem ad eundem modum intuentem nulla cunctatio contrarietatis impedit. At vero si exagonos librata examinatione perspicias, ex eisdem triangulis et super se positispentagonis procreantur. Namque vj exagonus ex quinario pentagono et uno, qui est in triangulorum ordine dispositus, nascitur. Nec alia est origo xv exagoni nisi ex duodenario pentagono et ternario triangulo. Quod si xxvij rursus exagonum ex quibus superioribus nascatur addiscas, nullos invenies nisi xxij pentagonum senariumque triangulum. Atque hoc in ceteris. Nec hunc geniturae ordinem eptagonorum procreatio refutabit. Namque ex super se exagonis et ex minus positus triangulis procreantur. Septenarius enim eptagonus nascitur ex senario exagono et uno potestate triangulo; xvij vero eptagonus ex xv exagono et ternario triangulo coniungitur; et xxxiiij ex xxvij scilicet exagono et senario triangulo; atque hoc in cunctis inoffensum reperire licet. Videsne igitur, ut primus omnium triangulus cunctorum summas efficiat et omnium procreationibus misceatur?

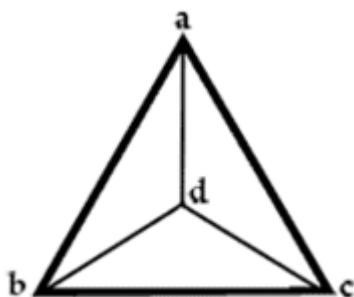
Pertinens ad figurarum numerorum descriptionem speculatio.

Hi vero omnes, si ad latitudinem fuerint comparati, id est trianguli tetragonis vel tetragoni pentagonis vel pentagoni exagonis vel hi rursus eptagonis, sine aliqua dubitatione triangulis sese superabunt. Nam si ternarium triangulum quaternario, vel quaternarium tetragonum quinario, vel quinarium pentagonum senario exagono, vel senarium septenario eptagono compares, primo se triangulo, id est sola transeunt unitate. At vero si senarius contra novenarium, vel hic contra xij, vel hic contra xv, vel quindecim contra x et viij, pro inveniendis differentiis comparentur, secundo se triangulo, id est ternario superabunt. X vero ad xvj et xvj ad xxij et xxij ad xxvij et xxvij ad xxxiiij si componas, tertio se triangulo vincent, id est senario. Atque hoc rite notabitur in aliis cunctis sequentibus sese perspectum omnesque se triangulis antecedent. Quare perfecte, ut arbitror, demonstratum est, omnium formarum principium elementumque esse triangulum.

De numeris solidis.

Hinc vero ad figuras solidas facilius via est. Praecognito enim, quid in planis numerorum figuris vis ipsa quantitatis naturaliter operetur, ad solidos numeros non erit ulla cunctatio. Sicut enim longitudini numerorum aliud intervallum, id est superficiem, ut latitudo ostenderetur, adiecimus, ita nunc latitudini si quis addat eam, quae alias altitudo alias crassitudo alias profunditas appellatur, solidum numeri corpus explebit.

De pyramide, quod ea sit solidarum figurarum principium sicut triangulus planarum



Triangulum cum notatis

Videtur autem, quemadmodum in planis figuris triangulus numerus primus est, sic in solidis, qui vocatur pyramis, profunditatis esse principium. Omnium quippe ratarum in numeris figurarum necesse est invenire primordia. Est autem pyramis alias a triangula basi in altitudinem sese erigens, alias a tetragona, alias a pentagona et secundum sequentium multitudines angulorum ad unum cacuminis verticem sublevata. Posito enim triangulo atque descripto si per tres angulos singulae lineae recte stantes ponantur, haeque tres inclinentur, ut ad unum medium punctum vertices iungant, fit pyramis, quae, cum a triangula basi profecta sit, tribus triangulis per latera concluditur hoc modo: Sit $a b c$ triangulum. Si huic igitur triangulo per tres angulos erigantur lineae et ad unum punctum convertantur, quod est d , ita ut d punctum non sit in plano, sed pendens, illae scilicet lineae ad ipsum erectae verticem et quodammodo cacumen d facient et erit basis $a b c$ unum triangulum, per latera vero tria triangula, id est unum triangulum $a d b$, aliud vero $b d c$, tertium $c d a$.

De his pyramidis, quae a quadratis vel a ceteris multiangulis proficiscuntur figuris



Tetragonum, pentagonum, exagonumque cum notatis

Idem si a tetragona basi proficiscatur et ad unum verticem eius lineae dirigantur, erit pyramis quattuor triangulorum per latera, uno tantum tetragono in basi posito, super quam ipsa figura fundata est. Et si a pentagono surgant v lineae, quinque rursus pyramis triangulis continebitur, et si ab exagono, sex triangulis nihilominus; et quantoscunque angulos habuerit figura, super quam pyramis residet, tot ipsa per latera triangulis continetur, ut ex subiectis descriptionibus palam est.

Solidorum generatio numerorum

Dicuntur autem huiusmodi pyramides hoc modo: prima pyramis de triangulo, secunda pyramis de tetragono, tertia pyramis de pentagono, quarta pyramis de exagono, quinta pyramis de eptagono, idemque in ceteris constat numeris. Nam quoniam lineares numeros esse diximus, qui ab uno profecti in infinitum current, ut sunt j ij $iiij$ $iiij$ v vj vij $viiij$ x , his autem ordinatim compositis et ad se invicem cum distantia iunctis superficies nascebantur, ut, si unum et duo iungeres, primus triangulus nasceretur, id est tres, et cum his adiungeremus tertium, id est ternarium, senarius triangulus rursus occurreret, et post hos tetragoni uno intermisso, pentagoni vero duobus, exagoni tribus, eptagoni relictis quattuor nascebantur: nunc vero ad solidorum corporum procreationem ipsae nobis superficies naturaliter figuratae provenient. Et ad faciendas quidem pyramidas a triangulo ipsi nobis trianguli componendi sunt; ad procreandas vero pyramidas a tetragono tetragoni; ad eas vero, quae sunt a pentagono pentagoni copulandi sunt. Et illae, quae sunt ab exagono vel eptagono non nisi exagonorum vel eptagonorum copulatione nascentur. Primus ergo potestate triangulus est unitas eandemque etiam ponimus virtute pyramidam; secundus vero triangulus est ternarius, quem si cum primo coniunxero, id est cum unitate, quaternaria mihi profunditas pyramidis excrescit. At vero si his tertium, senarium, iunxero denaria pyramidis procreabitur altitudo. His si denarium iunxero viginti numerorum pyramis veniet, atque ita in cunctis aliis eadem ratio copulationis est.

Trianguli

j $iiij$ vj x xv xxj $xxvij$ $xxxvj$ $xliv$ lv

Pyramides a triangulis

j iiij x xx xxxv lvj lxxiiij cxx clxv ccxx

In hac igitur coniunctione necesse est, ut semper, qui ultimus est coniugatorum numerorum, is quasi quodammodo basis sit. Cunctis enim latior invenitur. Et qui ante ipsum numeri coniungantur, minores esse necesse est, usque dum ad unitatem detractio rata perveniat, quae puncti quodammodo et verticis obtineat locum. Namque in x pyramide super sex additi sunt tres atque unus, qui senarius superat ternarium quantitate, ipsi vero tres unum pluralitate transcendunt, qui unus extremum terminum progressionis offendit. Similis quoque ratio in ceteris perspicui potest, si eorum procreationes diligentius volueris perscrutari. Illae quoque, quae sunt a tetragono pyramides, eadem tetragonorum super se compositione nascuntur. Descriptis enim cunctis tetragonis, id est j iiij viij xvj xxv xxxvj xlviij lxiij lxxxj c, si unitatem primam ex hac dispositione praesumam, erit mihi potestate et vi pyramis ipsa unitas, nondum etiam opere atque actu. At si huic tetragonum superponam, id est quattuor, nascetur pyramis quinque numerorum, quae duobus tantum numeris per latera positis continetur. Sin vero his sequentes novem adiecero, fiet mihi quattuordecim numerorum forma pyramidis, quae per latera tribus unitatibus concludatur. Atque huic si sequentem tetragonum xvj superponam, tricenaria mihi pyramidis forma producitur. In his quoque omnibus pyramidis tot erunt unitates per latera, quantae in se numerorum adgregatae fuerint quantitates. Nam unitas, quae prima pyramis est, unum solum, id est se ipsam gerit in latere, quinaria vero, quae constat ex uno et quattuor, duobus per latera designatur, et xiiij, quae ex tribus numeris compositis fit, ternario numero in latere posito constituitur. Hanc autem pyramidum generationem monstrat subiecta descriptio.

Tetragoni

j iiij viij xvj xxv xxxvj xlviij lxiij lxxxj c

Pyramides a tetragonis

j v xiiij xxx lv xcj cxi cciij cclxxxv ccclxxxv

Et ad eundem modum cunctae a ceteris multiangulis profectae formae in altioris summae spatia producuntur. Omnis enim multorum angulorum forma ex sui generis figura unitati superposita ab uno ingredientibus ad pyramidum constituendas figuras usque in infinita progreditur et ex hoc equidem apparere necesse est, triangulas formas ceterarum figurarum esse principium, quod omnis pyramis a quacunque basi profecta vel a quadrato, vel a pentagono, vel ab exagono, vel ab eptagono vel a quocunque similium solis triangulis usque ad verticem continetur.

De curtis pyramidis

Scire autem oportet, quae sint curtae pyramides, vel quae his curtae, vel quae ter curtae vel quater et deinceps secundum numerorum adiectionem. Perfecta enim pyramis est, quae a qualibet basi profecta usque ad primam vi et potestate pyramidam pervenit, unitatem. Sin vero a qualibet basi profecta usque ad unitatem altitudo illa non venerit, curta vocabitur, recteque huiusmodi pyramis tali nuncupatione signatur, si usque ad extremitatem punctumque non venerit. Haec autem est, ut si quis xvj tetragono adiciat viij atque huic iiij et ab ulterioris sese unitatis adiectione suspendat. Pyramidis equidem figura est, sed quoniam usque ad cacumen verticis non excrevit, curta vocabitur et habebit summitatem non iam punctum, quod unitas est, sed superficiem, quod est quilibet numerus secundum basis ipsius angulos porrectus atque ultimus adgregatus. Nam si tetragona fuerit basis, quadrata deminutione semper ascendit, et si pentagona basis, similiter, et si exagona, illa quoque ultima superficies erit exagona. Ergo in curta pyramide tot erit angulorum superficies, quot fuerit basis. Si vero illa pyramis non solum ad unitatem extremitatemque non pervenit, sed nec ad primum quoque opere et actu multiangulum eius generis, cuius fuerit basis, bis curta vocabitur; ut si a xvj tetragono proficiscens usque in novem terminum ponat neque excrecat ad quattuor. Et quotcunque tetragoni defuerint, totiens eam curtam esse dicemus; ut si unitas defuerit, primus quadratus, curtam, quam Graeci κολουρον vocant; si vero duobus tetragonis deficitur, id est unitate et eo, qui sequitur, vocatur bis curta, quod Graeci δικολουρον appellant. Quod si tribus tetragonis, ter curta dicetur, quam Graeci τρικολουρον nominant. Et quotcunque tetragoni fuerint minus,

totiens illam pyramidem curtam esse proponimus. Hoc autem non solis a tetragono pyramidis sed in omnibus ab omni multiangulo progredientibus speculari licet.

De cybis vel asseribus vel laterculis vel cuneis vel sphericis vel parallelepipedis numeris

Ac de solidis quidem, quae pyramidis formam obtinent, aequaliter crescentibus et a propria velut radice multiangula figura progredientibus dictum est. Est alia rursus quaedam corporum solidorum ordinabilis compositio, eorum qui dicuntur cybi vel asseres vel laterculi vel cunei vel sphaerae vel parallelepipeda, quae sunt, quotiens superficies contra se sunt, et ductae in infinitum nunquam concurrent. Dispositis enim in ordinem tetragonis i iiij viij xvj xxv, quoniam hi solam longitudinem latitudinemque sortiti sunt et altitudine carent, si per latera solam unam multiplicationem recipiant, aequalem provehant profunditatem. Nam quattuor tetragonus duos habet in latere et natus est ex bis duobus. Bis enim duo quattuor faciunt. Hos ergo duos ex ipsius latere si multiplices aequaliter, cybi forma nascetur. Nam si bis binos bis facias, octonaria quantitas crescit. Et est primus hic cybus. VIII vero tetragonus, quoniam tres habet in latere et factus est ex tribus in se multiplicatis, si ei unam lateris multiplicationem adiunxeris, rursus alius cybus aequabili laterum formatione concrevit. Ter enim tres si tertio duxeris, xxvij cybi figura producitur. Et xvj, qui est ex quattuor, si quater augeat, lxiiij cybus pari laterum demensione crassabitur. Et sequentes quidem tetragoni secundum eundem modum multiplicatione facta provehantur. Tot autem necesse est unitates cybus habeat in latere, quot habuit primus ille tetragonus, ex quo ipse productus est. Nam quoniam quattuor tetragonus duos tantum numeros habet in latere, duos quoque habet octonarius cybus. Et quoniam viij tetragonus tribus per latus unitatibus signabatur, solo ternario xxvij cybi latus urgetur. Et quoniam xvj tetragonus iiij unitatum latus habebat, totidem lxiiij cybus in latere gestabit unitates. Quare etiam vi et potestate cybi, quod est unitas, unus erit in latere. Omnis enim tetragonus una quidem superficies est quattuor angulorum, totidemque laterum. Omnis autem cybus, qui ex tetragonorum superficie in profunditatem corporis crevit, per tetragoni scilicet latus multiplicatus, habebit quidem superficies vj, quarum singula planitudo tetragono illi priori aequalis est, latera vero xij, quorum unumquodque singulis his, quae superioris fuere tetragoni, aequum est, et, ut superius demonstravimus, tot unitatum est; angulos vero viij, quorum singulus sub tribus eiusmodi continetur, quales priores fuere tetragoni, unde cybus ipse productus est. Ergo ex naturaliter profuso numero qui in subiecta forma descripti sunt subiecti tetragoni nascuntur, et ex his tetragonis qui subnotati sunt cybi provehantur.

Numerus naturalis:

j ij iiij vj vij

Tetragoni:

j iiij viij xvj xxv xxxvj xlviij

Cybi:

j viij xxvij lxiiij cxxv ccxvj cccxliij

Et quoniam omnis cybus ab aequaliteris quadratis profectus aequus ipse omnibus partibus est -- nam et latitudini longitudo et his duobus compar est altitudo -- et secundum sex partes, id est sursum deorsum dextra sinistra ante post, sibi aequalem esse necesse est: huic oppositum contrariumque esse oportebit qui neque longitudinem latitudini neque haec duo profunditati gerat aequalia, sed cunctis inaequalibus, quamvis solida sit figura, ab aequalitate cybi longissime distare videatur. Hi autem sunt, ut si quis faciat bis tres quater, vel ter quattuor quinquies et alia huiusmodi, quae per inaequales spatiorum gradus inaequaliter provehantur. Haec autem forma Graeco nomine scalenos vocatur. Nos vero gradatum possumus dicere, quod a minore modo velut gradibus crescat ad maius. Vocant autem eandem figuram Graeci quidam spheniscon; nos autem cuneum possumus dicere. Etenim quos ad quamlibet illam rem constringendam cuneos formant neque latitudinis neque longitudinis neque altitudinis habita ratione, quantum commodum fuerit, tantum vel altitudini minuitur, vel crassitudini profunditatis augetur. Atque ideo hos plerumque necesse est omnibus partibus inaequalibus inveniri. Quidam vero hos bomiscos vocant, id est quasdam arulas, quae in Ionica Graeciae regione, ut ait Nicomachus,

hoc modo formatae fuerunt, ut neque altitudo latitudini neque haec longitudini convenirent. Vocatur autem aliis quibusdam nominibus, quae nunc persequi supervacuum iudicavimus. Igitur cybi aequalibus se spatiis porrigentis et huius formae, quam diximus, gradata distributione dispositae medietates sunt, quae neque cunctis partibus aequales sunt, neque omnibus inaequales, quos Graeci parallelepipedos vocant. Latini nomen hoc ita uniformiter compositum habere non possunt, ut tamen idem pluribus dictum sit. Ea namque hoc nomine vocatur figura, quae alternatim positis latitudinibus continetur.

De parte altera longioribus numeris eorumque generationibus

Huiusmodi vero formas quales sunt, quae vocantur a Graecis *ετερομηκεις*, nos dicere possumus parte altera longiores. quarum figurarum numerus hoc modo definiendus est: Parte altera longior est numerus, quem si in latitudinem describas et ipse quidem quattuor venit laterum et quattuor angulorum, sed non cunctis aequalibus sed semper minus uno. Namque nec latera lateribus cuncta cunctis aequa sunt, nec longitudini latitudo, sed, ut dictum est, cum hinc altera pars maior fuerit, uno tantum minorem praecedat ac superat. Si enim numerum naturalem disponas in ordinem, et secundum per primum multiplices, talis nascitur numerus, vel si secundum per tertium, vel si tertium per quartum, vel si quartum per quintum, omnesque hi unitate tantum addita, multiplicentur, nascentur parte altera longiores. Disponatur enim numerus naturalis j ij iij iiij v vj vij. Et nunc quidem hactenus. Si quis igitur faciat unum bis, faciet ij, et rursus bis tres, faciet vj, ter quattuor, faciet xij, quater quinque, faciet xx, et hoc ad eundem ordinem. Quicumque igitur facti sunt, procreabuntur parte altera longiores, ut subiecta descriptio docet, in qua, ex quibus numeris multiplicati nascuntur parte altera longiores, super adscripti sunt, qui vero nascuntur, subterius sunt notati.

I	II	III	IIII	V	VI	VII
	II	VI	XII	XX	XXX	XLII
	II	III	III	IIII	IIII	IIII
		III	III	IIII	IIII	IIII
			III	IIII	IIII	IIII
				IIII	IIII	IIII
					IIII	IIII
						IIII

De antelongioribus numeris et de vocabulo numeri parte altera longioris

Ergo si unitate tantum discrepent, qui multiplicantur, descripti superius numeri protenduntur, sin vero aliquo numero, ut ter vij vel ter v vel aliquo modo alio, et non eorum latera sola discrepent unitate, non vocabitur hic numerus parte altera longior, sed antelongior. Alterum enim apud Pythagoram vel sapientiae eius heredes nulli alii nisi tantum binario adscribebatur. Hunc alteritatis principium esse dicebant, eandem autem naturam et semper sibi similem consentientemque nullam aliam nisi primaevam ingeneratamque unitatem. Binarius autem, numerus primus, est unitati dissimilis, idcirco quod primus ab unitate disiungitur. Atque ideo alteritatis cuiusdam principium fuit, quod ab illa prima et semper eadem substantia sola tantum est unitate dissimilis. Merito ergo dicentur hi numeri parte altera longiores, quod eorum latera unius tantum sese adiecta numerositate praecedunt. Argumentum autem est, alteritatem in binario numero iuste constitui, quod non dicitur alterum nisi e duobus ab his, inter quos bene loquendi ratio non negligitur. Amplius, quod impar numerus sola perfici unitate monstratus est, par vero sola dualitate, id est solo binario numero. Nam cuiuscunque medietas unus est, ille impar est, cuius vero duo, hic paritate recepta in gemina aequa disiungitur. Quare dicendum est, inparem numerum eiusdem atque in sua se natura tenentis inmutabilisque substantiae esse participem, idcirco quod ab unitate formetur, parem vero alterius plenum esse naturae, idcirco quod a dualitate completur.

Quod ex imparibus quadrati, ex paribus parte altera longiores fiant

At vero positus in ordinem ab unitate imparibus et sub his a dualitate paribus descriptis coacervatio imparium tetragonos facit, coacervatio parium superiores efficit parte altera longiores. Quare quoniam tetragonorum haec natura est, ut ab imparibus procreentur, qui sunt unitatis participes, id est eiusdem inmutabilisque substantiae, cunctisque partibus suis aequales sint, quod et anguli angulis et latera lateribus et longitudini compar est latitudo, dicendum est, huiusmodi numeros eiusdem naturae atque inmutabilis substantiae

participes, illos vero numeros, quos parte altera longiores paritas creat, alterius dicemus esse substantiae. Nam quemadmodum unus a duobus uno tantum alter est, sic horum latera a se tantum uno sunt altera et una tantum differunt unitate. Quare disponentur in ordinem omnes ab uno in pares et sub his omnes a binario numero pares.

ij ij iij j iij
 j iij j iij ij iij

Est ergo princeps imparis ordinis unitas, quae ipsa quidem effectrix et quodammodo forma quaedam est inparitatis, quae in tantum eiusdem nec mutabilis substantiae est, ut, cum vel se ipsa multiplicaverit vel in planitudine vel in profunditate, vel si alium quemlibet numerum per se ipsa multiplicet, a prioris quantitatis forma non discrepet. Namque si unum semel facias, vel si semel unum semel, vel si duo semel, vel si tres semel, vel si quattuor semel, vel quemlibet alium numerum multiplicet, a quantitate sua is, quem multiplicat, numerus non recedit, quod circa alium numerum non potest inveniri. Paris vero ordinis binarius numerus princeps est, quae dualitas, cum in eodem ordine paritatis sit, tum principium totius est alteritatis. Namque si se ipsa multiplicet vel per latitudinem vel etiam per profunditatem vel si quem numerum in suam conglobet quantitatem, continuo alter exoritur. Nam bis unum vel bis duo si facias, vel bis tres vel bis quattuor vel bis quinque vel quemlibet alium multiplicet, quisquis hinc nascitur, alius quam primo fuerat, invenitur. Nascuntur autem ex superiore descriptione et ex primo ordine omnes tetragoni hoc modo. Unum enim si respexeris, primus potestate tetragonus est. Sin vero unum tribus coacervaveris, quattuor tetragonus exoritur. Huic si quinarium iungam, novenarius rursus occurrit. Huic si copules septem, sedecim quadrati forma se suggerit. Idemque si in ceteris facias, omnes competenter quadratos videas procreari. At vero ex secundo paritatis ordine idem cuncti parte altera longiores fiunt. Namque si duos primo respexero, huiusmodi mihi numerus occurrit, qui fit ex bis uno. Cum vero duobus sequentes quattuor iunxero, parte altera longior rursus erit, senarius scilicet, qui fit ex bis tribus. Cui si sequentem adgregavero, nascetur mihi duodenaria forma, quae fit ex quater tribus. Quod si continuatim quis faciat, cunctos huiusmodi numeros in competenti ordine procreatos videbit, quam descriptionem scilicet inferior forma demonstrat.

Radices

 j j iij v j iij v vij
 iij iij v iij v vij vij viij viij xj

Tetragoni id est quadrati

ij iij vj xv xxvj

Radices

 i ij iij ij iij ij iij vj
 j iij j iij vj vj viij vj viij x viij x xij

Parte altera longiores

j ij x xx lij

De generatione laterculorum eorumque definitione

Quos autem superius laterculos diximus, quae sunt et ipsae quidem solidae figurae, hoc modo fiunt, quotiens aequalibus spatiis in longitudinem latitudinemque porrectis minor his additur altitudo, ut sunt huius modi: tres ter bis, qui sunt xvij vel quattuor quater bis, vel alio quo modo, ut his in latitudinem longitudinemque aequis minor altitudo ducatur. Hi definiuntur hoc modo: Laterculi sunt, qui fiunt ex aequalibus aequaliter in minus. Asseres vero et ipsae quidem figurae sunt solidae sed hoc modo, ut ex aequalibus aequaliter ducantur in maius. Nam si aequa fuerit latitudo longitudini et maior sit altitudo, illae figurae a nobis asseres, a Graecis docides nominantur. Ut si quis hoc modo faciat: iij quater novies, qui inde procreantur, asseres nominati sunt. Sphenisci vero, quos cuneolos superius appellavimus, hi sunt, qui ex inaequalibus inaequaliter ducti per inaequalia creverunt, cybi vero, qui ex aequalibus aequaliter per aequalia producti sunt.

De circularibus vel sphericis numeris

Ipsorum vero cyborum quanticunque fuerint ita ducti, ut a quo numero cybicae quantitatis latus coeperit, in eundem altitudinis extremas terminetur, numerus ille cyclicus vel sphericus appellatur; ut sunt multiplicationes, quae a quinario vel a senario proficiscuntur. Nam quinquies quinque, qui fit xxv, ab v progressus in eosdem desinit v. Et si hos rursus quinquies ducas, in eosdem v eorum terminus veniet. Quinquies enim xxv fiunt. CXXV et si hos rursus quinquies ducas, in quinarium numerum extremas terminabitur. Atque hocusque in infinitum idem semper eveniet. Quod in senario quoque convenit considerari. Hi autem numeri idcirco cyclici vel spherici vocantur, quod sphaera vel circulus in proprii semper principii reversione formantur. Est enim circulus posito quodam puncto et alio eminens defixo illius puncti, qui eminens fixus est, aequaliter distans a primo puncto circumductio et ad eundem locum reversio, unde moveri coeperat. Sphaera vero est semicirculi manente diametro circumductio et ad eundem locum reversio, unde prius coeperat ferri. Unitas quoque virtute et potestate ipsa quoque circulus vel sphaera est. Quotiens enim punctum in se multiplicaveris, in se ipsum, unde coeperat, terminatur. Si enim faciat semel unum, unus redit, si hoc semel, idem est, et si hoc rursus semel, idem est. Igitur si una fuerit multiplicatio, solam planitudinem reddit et fit circulus, si secunda, mox sphaera conficitur. Etenim secunda multiplicatio effectrix semper est profunditatis. Ex v igitur et vj paucas huiusmodi formas subscripsimus.

v	vj
xxv	xxxvj
cxxv	ccxvj
dcxx	mccxcvj
v	
mm	mmmmmmdc
mccxxv	clxxvj

De ea natura rerum, quae dicitur eiusdem naturae, et de ea, quae dicitur alterius naturae et qui numeri cui naturae coniuncti sint

Ac de solidis quidem figuris haec ad praesens dicta sufficiant. Qui autem de natura rerum propinquis investigantes rationibus, quique in matheseos disputatione versati, quid in quaque re esset proprium, subtilissime peritissimeque ediderunt, hi rerum omnium naturas in gemina dividentes hac speculatione distribuunt. Dicunt enim omnes omnium rerum substantias constare ex ea, quae propriae suaeque semper habitudinis est nec ullo modo permutatur, et ea scilicet natura, quae variabilis motus est sortita substantiam. Et illam primam inmutabilem naturam unius eiusdemque substantiae vocant, hanc vero alterius, scilicet quod a prima illa inmutabili discedens prima sit altera, quod nimirum ad unitatem pertinet et ad dualitatem, qui numerus primus ab uno discedens alter factus est. Et quoniam cuncti secundum unitatis speciem naturamque in pares numeri formati sunt, quique ex his coacervatis tetragoni fiunt, duplici modo eiusdem substantiae participes esse dicuntur, quod vel ab aequalitate formantur tetragoni, vel coacervatis in unum numeris imparibus procreantur. Illi vero, qui sunt pares, quoniam binarii numeri formae sunt, quique ex his coacervati collectique in unam congeriem parte altera longiores numeri nascuntur, hi secundum ipsius binarii numeri naturam ab eiusdem substantiae natura discessisse dicuntur, putanturque alterius naturae esse participes idcirco, quoniam, cum latera tetragonorum ab aequalitate progressa in aequalitatem propriae latitudinis ambitum tendant, hi adiecto uno ab aequalitate laterum discesserunt atque ideo dissimilibus lateribus et quodammodo a se alteris coniunguntur. Quare notum nobis est,

quod ex his ea, quae sunt in hoc mundo, coniuncta sunt. Aut enim propriae inmutabilis eiusdemque substantiae est, quod est deus vel anima vel mens vel quodcunque propriae naturae incorporalitate beatur, aut mutabilis variabilisque naturae, quod corporibus indubitanter videmus accidere. Unde nunc nobis monstrandum est, hac gemina numerorum natura, quadratorum scilicet et parte altera longiorum cunctas numeri species cunctasque habitudines vel ad aliquid relatae quantitatis, ut multiplicium vel superparticularium et ceterorum, vel ad se ipsam consideratae, ut formarum, quas dudum in superiore disputatione descripsimus, informari, ut, quemadmodum mundus ex inmutabili mutabilique substantia, sic omnis numerus ex tetragonis, qui inmutabilitate perficiuntur, et ex parte altera longioribus, qui mutabilitate participant, probetur esse coniunctus. Et primo quidem distribuendum est, qui sint hi, quos promeces vocant, id est anteriore parte longiores, vel qui, quos $\epsilon\tau\epsilon\rho\mu\eta\kappa\epsilon\iota\varsigma$, id est parte altera longiores. Est enim parte altera longior numerus, quicunque unitate tantum lateri crescit adiecta, ut sunt sex, scilicet bis tres, vel xij tres quater et consimiles. Anteriore vero parte longior est, qui sub duobus numeris huiusmodi continetur, quorum latera non possidet unitatis differentia, sed aliorum quorumcunque numerorum, ut ter quinque vel ter sex vel quater septem. Quodammodo enim longitudine in prolixiorem modum porrecta merito anteriore parte longior dicitur. Cur autem parte altera longiores numeri dicantur, supra iam dictum est. Quadrati vero quoniam aequam latitudinem longitudini gerunt, propriae longitudinis vel eiusdem latitudinis aptissime vocabuntur, ut bis duo, ter tres, quater quattuor et ceteri. Parte altera vero longiores, quod non eadem longitudine tendantur, alterius quodammodo longitudinis et parte altera longiores vocantur.

Quod omnia ex eiusdem natura et alterius natura consistant idque in numeris primum videri

Omne autem, quicquid in propria natura substantiaque est immobile, terminatum definitumque est, quippe quod nulla variatione mutetur, nunquam esse desinat, nunquam possit esse, quod non fuit. At haec unitas sola est et, quae unitate formantur, comprehensibilis et determinatae et eiusdem substantiae esse dicuntur. Ea vero sunt, vel quae ab aequalibus crescunt, ut quadrati, vel quos ipsa unitas format, id est in pares. At vero binarius et cuncti parte altera longiores, qui a finita substantia discesserunt, variabilis infinitaeque substantiae nominantur. Constat ergo numerus omnis ex his, quae longe disiuncta sunt atque contraria, ex imparibus scilicet et paribus. Hic enim stabilitas, illic instabilis variatio, hic immobilis substantiae robur, illic mobilis permutatio; hic definita soliditas, illic infinita congeries multitudinis. Quae scilicet, cum sint contraria, in unam tamen quodammodo amicitiam cognationemque miscentur et illius unitatis informatione atque regimento unum numeri corpus efficiunt. Non ergo inutiliter neque inprovidae, qui de hoc mundo deque hac communi rerum natura ratiocinabantur, hanc primum totius mundi substantiae divisionem fecerunt. Et Plato quidem in Timaeo eiusdem naturae et alterius nominat, quicquid in mundo est, atque aliud in sua natura permanere putat individuum inconiunctumque et rerum omnium primum, alterum divisibile et nunquam in proprii statu ordinis permanens. Philolaus vero: Necessae est, inquit, omnia quae sunt vel infinita esse vel finita, demonstrare scilicet volens, omnia, quaecunque sunt, ex his duobus consistere, aut ex finita scilicet esse aut ex infinita, ad numeri sine dubio similitudinem. Hic enim ex uno et duobus et impari atque pari coniungitur, quae manifesta sunt aequalitatis atque inaequalitatis, eiusdem atque alterius, definitae atque indefinitae esse substantiae. Quod videlicet non sine causa dictum est, omnia, quae ex contrariis consistent, armonia quadam coniungi atque componi. Est enim armonia plurimorum adunatio et dissidentium consensio.

Ex eiusdem atque alterius numeri natura qui sunt quadratus et parte altera longior, omnes proportionum habitudines constare

Disponantur ergo in ordinem non iam pares atque impares, ex quibus quadrati vel parte altera longiores fiunt, sed hi ipsi, qui illis coacervatis in unumque redactis et quadrati et parte altera longiores prodeunt. Ita enim videbimus istorum quendam consensum et ad ceteras numeri partes procreandas amicitiam, ut non sine causa hoc in omnibus rebus ab numeri specie natura rerum sumpsisse videatur. Sint igitur duo versus tetragonorum ab unitate omnium et a binario numero parte altera longiorum.

ij	iiij	vj	xv	xxvj	lviiiij	
j	j	ij	x	xx	lij	vj

Horum igitur si primum compares primo, dupli quantitas invenitur, quae est prima multiplici-
 tatis species, si vero secundum secundo hemioliae quantitas habitudo producitur, si tertium tertio sesquitertia proportio
 procreatur, si quartum quarto, sesquiquarta, et si quintum quinto, sesquiquinta, et hinc superparticularium
 normam in quamvis longissimum spatium progrediens integram inoffensamque reperies, ita ut in prima dupli
 proportione unitatis solius sit differentia, duo namque ab uno sola semper discrepant unitate. In sesquialtera vero
 duorum est differentia, in sesquitertia trium, in sesquiquarta quattuor et deinceps secundum superparticulares
 formas numerorum, quod ad differentias adinet, uno tantum crescit adiectio numerum explicans naturalem.

	ij	iiij	vj	xv	
j	ij	iiij			
j	j	ij	x	xx	

Sin vero secundum tetragonum primo parte altera longiori compares et tertium secundo et quartum tertio et
 quintum quarto, easdem rursus proportiones effici pernotabis, quas in superiore forma descripsimus, sed hic
 differentiae ab unitate non inchoant, sed a binario numero in infinitum per eosdem calculos progrediuntur,
 eritque secundus primis duplu, tertius secundi sesquialter, quartus tertii sesquitertius, secundum eandem
 convenientiam, quae superius demonstrata est.

	ij	iiij	vj	xv	xxvj
j	ij	iiij			j
j	j	ij	x	xx	

Rursus quadrati invicem imparibus differunt, parte altera longiores paribus.

Differentiae impares

ij		ij	iiij	j	iiij
ij	iiij	vj	xv	xxvj	lviiiij

Quadrati

Differentiae pares

ij	j	iiij		ij	iiij	
j	j	ij	x	xx	lij	vj

Parte altera longiores

At vero si inter primum et secundum tetragonum primum parte altera longiorem ponimus, ad utrosque eos una proportione coniungitur. In utrisque enim proportionibus dupli multiplicitas invenitur. Sin vero inter secundum tertiumque tetragonum secundum parte altera longiorem ponas, sesquialterae comparationis ad utrosque forma componitur. Et si inter tertium et quartum tetragonum tertium parte altera longiorem constituas, sesquitertia species nascitur. Et idem si in cunctis feceris, cunctas superparticularcs species invenire miraberis.

Duplus

j iij

Sesquialter

iiij j iiij

Sesquitercius

iiij ij vj

Sesquiquartus

vj x xv

Et ad eundem modum in ceteris convenit intueri. Rursus si ponantur duo tetragoni ex superius descriptis, id est primus et secundus et in unum colligantur, et medius eorum parte altera longior his multiplicetur, tetragonus fit. Namque unus et iiij, si iungantur, v faciunt. Eorum binarius parte altera longior, si bis ducatur, iiij fiunt, qui iuncti viiij sine ulla dubitatione conficiunt, qui est numerus quadratus. Et ad eundem modum in aliis hoc modo dispositis numeris, quos supra descripsimus, idem constat intellegi. Sin vero convertas et inter duos, primum et secundum, parte altera longiores secundum tetragonum ponas, qui in ordine quidem secundus est, sed actu et opere primus, ex duobus parte altera longioribus congregatis et bis multiplicato medio tetragono rursus tetragonus conficitur. Namque inter senarium et binarium numerum, qui sunt primus et secundus parte altera longiores, si ponatur quaternarius ordine secundus, primus actu tetragonus, et coniungantur ij et vj, faciunt viij; tum si his ducantur medii iiij, faciunt rursus viij, qui cum superioribus iuncti xvj tetragonum pandunt.

		iiij		xv			
	iiij	ij		xiiij			
j	iiij	iiij	j	iiij	iiij	ij	vj
	iiij		xv			lviiij	
	iiij		viiij			xxij	
	iiij		viiij			xxij	

indeterminata potentia ab aequalitatis natura et a suis se finibus continente substantia discedens aut in maius exuberat aut in minora decrescit.

Quod principaliter eiusdem quidem sit substantiae unitas, secundo vero loco in pares numeri, tertio quadrati, et quod principaliter dualitas alterius sit substantiae, secundo vero loco pares numeri, tertio parte altera longiores

Constat igitur primo quidem loco unitatem propriae inmutabilisque substantiae eiusdemque naturae, dualitatem vero primam alteritatis mutationisque esse principium; secundo vero loco omnes in pares numeros propter unitatis cognationem eiusdem atque inmutabilis substantiae esse participes, pares vero ob binarii numeri consortium alteritatibus esse permixtos; tetragonos quoque ad eundem modum considerari manifestum est. Nam quod eorum compositio et coniunctio ex imparibus fit, inmutabili eos naturae pronuntiabo coniunctos. Quod vero parte altera longiores ex copulatione parium procreantur, nunquam ab alteritatis varietate separantur.

Alternatim positis quadratis et parte altera longioribus qui sit eorum consensus in differentiis et in proportionibus

Illud igitur perspicendum est, quod, si idem tetragoni et parte altera longiores disponantur, ita ut alternatim sibi permixti sint, tanta in his est coniunctio, ut alias sibi in eisdem proportionibus communicent, discrepent autem differentiis, alias vero differentiis pares sint, proportionibus distent. Disponantur enim in ordinem idem illi superiores tetragoni et parte altera longiores ab uno: j ij iiij vj viiij xij xvj xx xxv xxx. Ergo in superiore formula hoc maxime intuendum est. Namque inter j, qui est tetragonus, et ij dupla proportio est; inter ij et iiij dupla. Hic ergo tetragonus cum parte altera longiore atque hic cum sequente tetragono eadem proportione iunguntur, differentiis vero non isdem. Namque duorum atque unius sola unitas differentia est, sed idem duo a quaternario solo binario relinquuntur. Rursus si ij ad iiij speculeris, dupla est proportio, si iiij ad vj, habitudinem sesquialteram recognosces. Hic ergo in proportionibus discrepant, in differentiis pares sunt. Namque et iiij a duobus et vj a iiij eodem binario distant. In sequentibus etiam eodem modo, sicut in primis fuit, ratio constat. Nam eadem proportio est, differentiis non eisdem. Nam iiij ad vj et vj ad viiij sesquialtera proportione iunguntur, vj autem quaternarium duobus, viiij vero senarium tribus praetereunt. In sequentibus etiam eadem ratio speculabitur et semper alternatim, nunc quidem eadem proportiones, aliae differentiae sunt, nunc autem ordine permutato eisdem differentiis aliae proportiones, semperque, in quibus differunt, secundum naturalis numeri ordines tetragoni et parte altera longiores sese superabunt, tantum quod geminatis summulis naturalis numeri fit progressio. Quod mirum videri non debet. Nos enim ipsas summas tetragonorum et parte altera longiorum geminavimus ad primas secundasque proportiones.

Proportiones

		ε	ε	s	s	s	s	s	s		
upla	upla	esqu-	esqu-	esqui-	esqui-	esqui-	esqui-	esqui-	esqui-		
		ε	ε	t	t	q	q	q	q		
		ltera	ltera	ertia	ertia	uarta	uarta	uinta	uinta		
		j	ij	j	iiij	ij	vj	x	xv	xx	xxvj
			i	i	ij	i	i	i	v	v	v
		j	j	ij	ij	iiij	iiij		v	v	j

Differentiae

Eaedem quoque differentiae mirabilem in modum a toto per sequentes partes et per easdem unitates, quibus superius creverunt, progrediuntur. Namque inter unum et duo tantum unitas intercedit, quae unitatis, cui aequalis est, totum est; binarii vero medietas. Eodemque modo inter ij et iiij tantum ij sunt, qui binarii totum sunt, quaternarii medietas. Inter quaternarium vero et senarium idem ij sunt, ad quaternarium medietas, ad senarium pars tertia iiij vero, qui sequuntur, qui inter vj et viiij constituti sunt medii, sunt quidem senarii

dimidium, pars vero tertia novenarii. Et rursus ternarius, qui novenarii pars tertia est, duodenarii quarta est; et ad eundem modum usque in finem descriptionis geminatis huiusmodi partibus, sicut ipsa quoque summarum comparatio geminata est, aequas partium progressionem aspicias.

Probatio quadratos eiusdem esse naturae

Illud autem apertissimum signum est, omnes tetragonos imparibus esse cognatos, quod in omni dispositione ab uno vel in duplicibus vel in triplicibus talis naturae ordo conseritur, ut nunquam, nisi secundum inparem locum tetragonus inveniatur. Disponamus enim in ordinem numeros, primo quidem duplos, deinde triplos.

					∴	lxii	cxxvi		
j	iiij	iiij	vj	xxij	ij	ij			cclvj
					∴	dcc	mmcl		mmmm
ij	iiij	xvij	xxxj	cxliij	xxviiiij	xxxvij			mmdlxj

Si igitur in utrisque versibus primos aspicias, singulos quos invenis, quoniam tetragoni sunt, in impari loco sunt constituti, quoniam primi sunt. Si vero tertium locum respexeris, iiij et viiij notabis, quorum hic a duobus proficiscitur, illum ternarius creat; qui sunt loco impari constituti. Quintum deinde si videas locum xvj et lxxxj respicias, sed unus a quaternario nascitur, alterum novenarius creat. Et si nonum locum rursus adspicias, tetragonos pernotabis cclvj et mmmmmmdlxj; quorum superior fit a xvj, inferior vero ab lxxxj. Idem si in infinitum facere libeat, indiscrepanter incurrit.

Cybos eiusdem participare substantiae, quod ab imparibus nascantur

Ipsi vero cybi, qui quamquam tribus intervallis sublatis sint, tamen propter aequalem multiplicationem participant immutabilis substantiae eiusdemque naturae sunt socii, non aliorum quam imparium coacervatione producuntur, nunquam vero parium. Nam si omnes ab unitate impares disponantur, iuncti figuras cybicas explicabunt.

j iiij v vij viiij xj xiiij xv xvij xviiiij xxj

In his igitur qui primus est, potestate et virtute primum cybum faciet; iuncti vero duo qui sequuntur, ternarius scilicet et quinarus, secundum efficiunt cybum, qui est octonarius. Iuncti autem tres, qui sequuntur, septenarius novenariusque et xj cybum facient, qui xxvij numero continetur, qui est tertius. Et sequentes quattuor quartum, et qui sequuntur quinque quintum, et ad eundem modum quotus quisque cybus efficitur, tot coniunctione impares apponuntur. Hoc autem diligentius subiecta descriptio docet.

ij	ij	iiij	j	iiij	v	vij	viiiij
iiij		xvij				xiiiij	

xxj xxiiij xxv xxvij xxviiiij

cxxv

De proportionalitatibus

Et de his quidem sufficienter dictum est; nunc res admonet quaedam de proportionibus disputantes, quae nobis vel ad musicas speculationes vel ad astronomicas subtilitates vel ad geometricae considerationis vim vel etiam ad veterum lectionum intelligentiam prodesse possint, arithmeticae introductionem commodissime terminare. Est igitur proportionalitas duarum vel trium vel quotlibet proportionum adsumptio ad unum atque

collectio. Ut etiam communiter definiamus: proportionalitas est duarum vel plurium proportionum similis habitudo, etiamsi non eisdem quantitibus et differentiis constitutae sint. Differentia vero est inter numeros quantitas. Proportio est duorum terminorum ad se invicem quaedam habitudo et quasi quodammodo continentia, quorum compositio quod efficit, proportionale est. Ex iunctis enim proportionibus proportionalitas fit. In tribus autem terminis minima proportionalitas invenitur. Fit etiam in pluribus, sed longior; ut binarius ad unum, quoniam duo sunt termini, duplam obtinet proportionem. Sin vero quattuor contra duo compares, hic quoque dupla proportio est. Quos tres terminos si continue consideres, ex duabus proportionibus fit proportionalitas et est proportionalitas unum ad duo et duo ad quattuor. Est enim proportionalitas, ut dictum est, collectio proportionum in unumque redactio. Fit etiam et in longioribus. Nam si quattuor illis octo velis adiungere et his xvj et his xxxij et deinceps duplos, qui sequuntur, fit in omnibus dupla proportionalitas ex proportionibus duplis. Igitur quotiens unus atque idem terminus ita duobus circum se terminis communicat, ut ad unum dux sit, ad alium comes, haec proportionalitas continua vocatur, ut unus, duo, quattuor. Est enim aequalitas in his proportionibus et quemadmodum sunt iij ad ij, sic sunt ij ad unum, et rursus quemadmodum unus ad duo, sic duo ad quattuor. Et secundum quantitatem quoque numeri eodem modo est. Quantum enim tres superant binarium, tantum binarius unitatem, et quanto unus a duobus minor est, tanto binarius a ternario superatur. Sin vero alius ad unum refertur terminus, alius vero ad alium, necesse est habitudinem disiunctam vocari, ut ad qualitatem quidem proportionis sunt: j ij iij viij. Sic enim sunt quemadmodum duo ad unum, sic octo ad quattuor, et conversim: quemadmodum unus ad duo, sic quattuor ad octo, et permutatim: quemadmodum quattuor ad unum, sic octo ad binarium. Secundum quantitatem vero numeri, ut sunt: j ij iij iij. Quantum enim unus a duobus vincitur, tantum ternarius a quaternario superatur, et quanto duo unum vincunt, tanto ternarium quaternarius transit. Permixtim etiam: quanto unus tribus minor est, tanto binarius quaternario, vel quanto ternarius unitatem superat, tanto binarium transgreditur quaternarius.

Quae apud antiquos proportionalitas fuerit; quas posteriores addiderint

Confessae quidem et apud antiquiores notae, quaeque ad Pythagorae vel Platonis vel Aristotelis scientiam pervenerunt, hae tres medietates sunt: arithmetica, geometrica, armonica. Post quas proportionum habitudines tres aliae sunt, quae sine nomine feruntur quidem, vocantur autem quarta, quinta, sexta, quae superius dictis oppositae sunt. At vero posteri propter denarii numeri perfectionem, quod erat Pythagorae complacitus, medietates alias quattuor addiderunt, ut in his proportionalitatibus denariae quantitatis corpus efficerent. Secundum quem numerum et priores quinque habitudines comparationesque descriptae sunt, ubi quinque maioribus proportionibus, quos vocavimus duces, minores aptavimus alios terminos, quos comites diximus. Inde etiam in Aristotelica atque Archytae prius decem praedicamentorum descriptione Pythagoricum denarium manifestum est inveniri; quando quidem et Plato, studiosissimus Pythagorae, secundum eandem disputationem dividit, et Archytas Pythagoricus ante Aristotelem, licet quibusdam sit ambiguum, decem haec praedicamenta constituit. Inde etiam decem membrorum particulae, inde alia permulta, quae omnia persequi non est necesse.

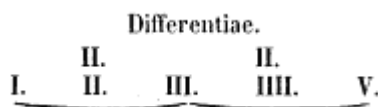
Quod primum de ea, quae vocatur arithmetica proportionalitas, dicendum sit

Nunc vero de proportionalitatibus deque medietatibus dicendum est, et primum quidem de ea medietate tractabimus, quae secundum quantitatis aequalitatem neglecta proportionis parilitate constitutorum terminorum habitudines servat. In his autem quantitibus medietas ista versatur, inque his speculanda est, in quibus a se ipsis termini differunt. Quid autem esset differentia terminorum superius definitum est. Hanc autem esse arithmetica medietatem numerorum, ipsa ratio declarabit, quoniam eius proportio in numeri quantitate consistit. Quae igitur causa est, huiusmodi terminorum habitudinem, id est arithmetica, cunctis aliis proportionalitatibus antepone? Primum, quod hanc nobis in principio ipsa numerorum natura et vis naturalis quantitatis obponit. Huiusmodi enim proportionibus quaeque ad terminorum differentias pertinent, ut paulo post demonstrabitur, in naturalis primum numeri dispositione cognoscimus.

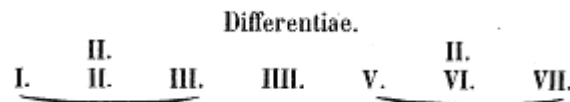
Deinde, quod in superiore libro disputantibus nobis apparuit, arithmetica vim geometrica atque musica esse antiquiorem et quod inlata non has simul inferret, sublata vero perimeret. Quare ordine disputatio progredietur, si ab ea primo inchoandum sit medietate, quae in numeri differentia non in proportionis speculatione versatur.

De arithmetica medietate eiusque proprietatibus

Arithmetice medietatem vocamus, quotiens vel tribus vel quotlibet terminis positus aequalis atque eadem differentia inter omnes dispositos terminos invenitur. In qua neglecta proportionis aequalitate terminorum tantum differentiarumque speculatio custoditur, ut: j ij iij iiij v vj vij viij viiij x. In hac enim naturalis numeri dispositione, si quis continuatim differentias terminorum curet aspicere, secundum arithmetice medietatem aequa terminorum inter se discrepantia est; aequales enim sunt differentiae, sed eadem proportio atque habitudo non est. Si igitur in tribus terminis consideratio sit, continua proportionalitas dicitur; sin vero hic alius dux et alius comes, illic vero utrique sint alii, vocabitur disiuncta medietas. Si igitur in tribus tantum terminis secundum continuam medietatem respexeris vel in quattuor vel in quotlibet aliis secundum disiunctam easdem semper differentias terminorum videbis, tantum solis proportionibus permutatis. Id si in uno quis noverit, reliqua eum ratio non latebit. Sit continua medietas j ij iij. Hic unus a duobus et duo a tribus solis tantum singulis distant, et sunt eadem differentiae, proportionibus vero aliae. Namque duo ad unum duplus est, iij ad ij sesquialter. Et in ceteris idem videbis. Sin autem permiscens et aliquos praeteriens eligas et in his aliquam speculationem ponas, idem poterit evenire. Nam si aequales terminos intermittas et uno sese in priore dispositione praetereant, si singulos intermittas, solius binarii notabitur differentia, sin vero duos praetereas, ternarii, si tres, quaternarii, si quattuor, quaternarii. Et ad eundem modum uno plus, quam intermiseris, erit illa, quam quaerimus, differentia terminorum. Namque si in tribus terminis singuli relinquantur, binarius semper intererit.

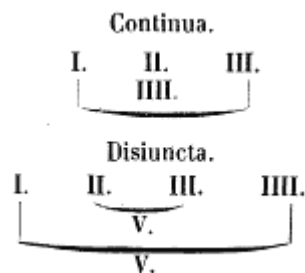


Videsne ut, cum superius in naturalis numeri dispositione se termini singulis praeterirent, praetermissis duobus et iij unus ad ij et iij ad quinarium comparati binarium solum in differentia retinuerint. Nec non etiam in disiuncta eadem versabitur observatio.

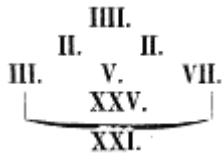


Talibus igitur vestigiis insistentem nullus ab eadem similitudine error abducat. Namque si duos intermittas, ternarius differentiam continebit, si tres, quaternarius, si quattuor, quinarium aequae in continuis proportionibus atque disiunctis. Qualitas autem proportionis eadem non erit, quamvis sint aequi termini differentiis distributi. Quod si conversim ponantur, ut non eisdem differentiis eadem qualitas proportionis eveniat, geometrica talis proportionalitas, non arithmetica nominatur.

Est autem proprium huius medietatis, quod, si in tribus terminis speculatio sit, compositis extremitatibus illa summa, quae inter extremitates est, non loco tantum verum etiam sit quantitate medietas. Ut si ponantur j ij iij, unus et iij quattuor reddunt, duo vero, qui medius inter utrosque est, quaternarii medietas invenitur. Quod si bis medietatem ducas, aequus erit extremitatibus. Bis enim ij iiij creant. Sin vero disiuncta sit, quod fit ex utrisque extremitatibus compositis, hoc ex duabus medietatibus redditur. Si enim sint j ij iij, unus et quattuor quinarium creant, ij et iij medii in eundem rursus quinarium surgunt.



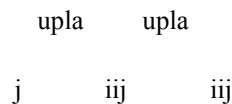
Est illi hoc quoque solida proprietate coniunctum, quod quemadmodum sunt omnes termini huiusmodi dispositionis ad se ipsos, ita sunt differentiae ad differentias constitutae. Namque omnis terminus sibi ipsi aequalis est et differentiae differentiis sunt aequales. Illud quoque subtilius, quod multi huius disciplinae periti nisi Nicomachus nunquam antea perspexerunt, quod in omni dispositione vel continua vel disiuncta, quod continetur sub duabus extremitatibus minus est eo numero, qui ex medietate conficitur, tantum, quantum possunt duae sub se differentiae continere, quae inter ipsos sunt terminos constitutae. Ponamus enim tres terminos huiusmodi iij v vij. Si igitur tres septies augeantur, in xxj numerum cadunt. Quod si medium terminum, id est v, in semet ipsum multiplicaveris, quinquies quinque faciunt xxv. Et hic numerus ab eo, quem extremitates colligunt, quaternario maior est, quem scilicet differentiae conficiunt. Inter iij enim et v et vij bini intersunt, quos si in sese multiplices, iij reddunt. Bis enim duo iij fiunt. Recte igitur dictum est, in hac huiusmodi dispositione, quod continetur sub extremitatibus, minus esse illo numero, qui fit ex medietate, tantum, quantum differentiae in se multiplicatae restituunt.



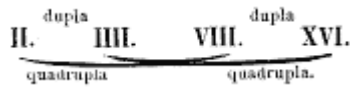
Quantum vero proprium huiusmodi dispositionis notatur, quod antiquiores quoque habuere notissimum, quod in hac proportionalitate vel medietate in minoribus terminis maiores proportiones, in maioribus minores comparationes necesse est inveniri. Namque in dispositione hac j ij iij minores termini sunt j et ij, maiores ij et iij. Et ij ad unum duplus est, tres vero ad ij sesquialter. Sed maior est proportio dupli quam sesquialtera. In armonica autem medietate e contrario evenire contingit; in minoribus enim terminis minores proportiones, in maioribus maior proportionis quantitas custoditur. Harum vero medietatum, id est arithmeticae atque armonicae, geometrica proportionalitas media esse notata est, quae vel in maioribus vel in minoribus terminis aequas numerorum qualitates in proportionalitate custodit. Inter maius vero et minus aequalitas loco ponitur medietatis. Et de arithmetica quidem medietate satis dictum est.

De geometrica medietate eiusque proprietatibus

Nunc vero quae hanc sequitur, geometrica medietas expediatur, quae sola vel maxime proportionalitas appellari potest propterea quod in eisdem proportionibus terminorum vel in maioribus vel in minoribus speculatio ponitur. Hic enim aequa semper proportio custoditur, numeri quantitas multitudoque negligitur, contrarie quam in arithmetica medietate, ut sunt j ij iij vij xvj xxxij lxiiij vel in tripla proportione j ij viij xxvij lxxxj vel si quadrupla vel si quincupla vel si in quamlibet multiplicatam numerorum sit constituta distensio. In his enim, quotlibet terminos sumpseris, explebunt geometricam medietatem, quemadmodum enim prior ad sequentem est, ita sequens ad alium, et rursus, si permixte facias, idem erit. Si enim ponantur tres termini ij iij et viij, quemadmodum sunt viij ad iij ita quattuor ad duo. Atque hoc si convertas, quemadmodum sunt duo ad quattuor, ita erunt quattuor ad viij.

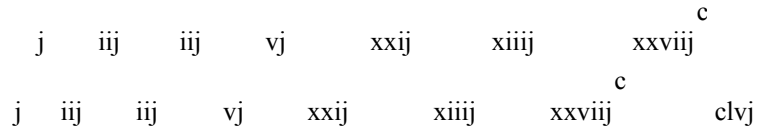


Vel si in quattuor terminis, ut sunt ij iij viij xvj, quemadmodum est primus ad tertium, id est ij ad viij, sic erit secundus ad quartum, id est iij ad xvj. Utraque enim proportio quadrupla est. Et conversim quemadmodum quartus est ad secundum, ita tertius notatur ad primum. Hoc vero etiam disiuncte licet. Nam quemadmodum est primus ad secundum, id est duo ad iij, sic tertius ad quartum, id est viij ad xvj. Et conversim quemadmodum secundus ad primum, id est iij ad ij, ita quartus ad tertium, id est xvj ad viij. Idque in omnibus rata consideratione perspicies.



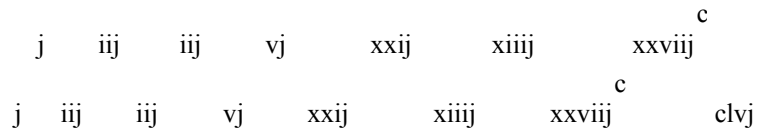
Habet autem proprium huiusmodi medietas, quod in omni dispositione secundum hanc proportionalitatem terminorum differentiae in eadem proportione contra se sunt, qua fuerint ipsi termini, quorum sunt ipsae differentiae. Sive enim dupli contra se sint termini, duplae erunt etiam differentiae, sive tripli, triplae, sive secundum quamlibet multiplicitem, eadem in differentiis multiplicitas erit, quam prima consideratio invenit in terminis, ut subiecta descriptio monet.

Differentiae duplae



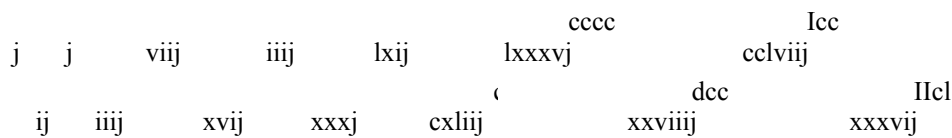
Nulli igitur dubium esse potest, quod, cum omnes termini dupli sint, ita differentiae quoque eorum terminorum duplae esse videantur, ut uno minus termino in differentiis omnes paene dispositos subter terminos, quorum sunt ipsae differentiae, superior ordo reddiderit. Est etiam aliud proprium, quod omnis ad minorem maior terminus comparatus ipsum minorem retinet differentiam. Namque binarius ad unitatem ipsa unitate differt, et quaternarius binario ipso binario et octonarius quaternario ipso quaternario et deinceps maiores alii ipsis minoribus ab eisdem ipsis differunt, quos numerositate praetereunt. Et hoc quidem in duplici proportione cadit; sin vero sint triplices proportiones maior terminus a minore termino duplicato minore termino differt, ut, si sint j iij viij, tres ab uno binario differunt, in quem unitas, id est minor terminus duplicatus exundat; et viij a tribus senario differunt, quem ternarius duplicatus educit. Et in aliis cunctis eiusmodi ratio repperietur. Sin vero quadruplices sint, triplicato minore termino maior terminus a minore distabit, et, si quincupla, quadruplicato, et, si sescupla quincuplicato, et una minus multiplicatione, quam est ipsa minorum ad maiores comparatio terminorum, minorem numerus maior exsuperat.

Differentiae ipsi minores



Termini dupli

Differentiae dupli minores



Termini tripli

Differentiae tripli minores



ij	ij	lvij	xcij	clxvij	IIIxxij	xxxvij	
	iij	vj	xiij	clvj	xxiiij	IIIxcvj	XVJcccl xxxiiij

Termini quadrupli

Haec autem proportionalitas et in aliis omnibus vel superparticularibus vel superpartientibus invenitur huiusmodi proprietate in omnibus conservata, ut in continua proportione, quod fit sub extremitatibus, si tres fuerint termini, hoc a medietate multiplicata consurgat. Si enim sint ij iij vij, quod fit ex bis vij, idem fit ex quater iij; vel si sit in quattuor terminis disiuncta proportio, quod fit sub utrisque extremitatibus, id duarum medietatum multiplicatione concreseat, ut, si sint ij iij vij xvj, quod fit ex bis xvj, id ex quater vij reddatur. Exemplar autem nobis maximum certissimumque sit illud, ubi ex aequalitate diximus omnes inaequalitatis species fundi. Illic enim in omnibus vel multiplicibus vel superpartientibus vel superparticularibus vel in ceteris coniunctis geometrica proportionalitas custoditur has omnes proprietates, quas supra diximus, continens. Quarta vero est proprietas huiusce medietatis, quod vel in maioribus vel in minoribus terminis aequales semper proportiones sunt. Namque si ponantur ij iij vij xvj xxxij lxiiij, inter hos omnes dupla proportio est. Apparet etiam haec proportionalitas in binis proportionibus ab unitate alternatim parte altera longioribus quadratisque dispositis a prima multiplicatis habitudine, id est a duplici per cunctas superparticularis habitudines proportionem discurrens; quod subiecta descriptione signatum est.

Tetragonus	:	
Parte altera	:	dupla
longior	j	
Tetragonus	iij	dupla
Parte altera	:	sesqui
longior	j	altera
Tetragonus	iiij	altera
Parte altera	:	sesqui
longior	ij	tertia
Tetragonus	vj	tertia
Parte altera	:	sesqui
longior	x	quarta
Tetragonus	xv	quarta
Parte altera	:	sesqui
longior	xx	quinta
Tetragonus	xxvj	quinta
Parte altera	:	sesqui
longior	lij	sexta
Tetragonus	lviiij	sexta

Quae medietates quibus rerum publicarum statibus comparentur

Atque ideo arithmetica quidem rei publicae comparatur, quae paucis regitur, idcirco quod in minoribus eius terminis maior proportio sit. Musicam vero medietatem optimatum dicunt esse rempublicam ideo, quod in maioribus terminis maior proportionalitas invenitur. Geometrica medietas popularis quodammodo et exaequatae

civitatis est. Namque vel in maioribus vel in minoribus aequali omnium proportionalitate componitur, et est inter omnes paritas quaedam medietatis aequum ius in proportionibus conservantis.

Quod superficies una tantum in proportionalitatibus medietate iungantur, solidi vero numeri duabus medietatibus in medio collocatis

Post haec igitur tempus est, ut expediamus nunc quiddam nimis utile in Platonica quodam disputatione, quae in Timaei cosmopoeia haud facili cuiquam vel penetrabili ratione versatur. Omnes enim planae figurae, quae nulla altitudine crescunt, una tantum medietate geometrica continuantur; alia, quae iungat, non potest inveniri; unde duo tantum in his intervalla sunt constituta, a primo scilicet ad medium et a medio ad tertium. Si vero fuerint cybi, duas tantum habebunt medietates, ubi tertia inveniri non poterit secundum geometricam scilicet proportionem; unde formae solidae tria intervalla dicuntur habere. Est enim unum intervallum a primo ad secundum et a secundo ad tertium et a tertio ad quartum, quae est scilicet postrema distantia. Recte igitur et planae figurae duobus intervallis et solidae tribus contineri dicuntur. Sint enim duo tetragoni $iiij$ scilicet et $viiiij$. Horum igitur unus tantum medius in eadem proportione constitui potest. Namque senarius ad $iiij$ sesquialter est et $viiiij$ ad senarium eodem modo sesquialter. Hoc autem idcirco evenit, quod singula latera singulorum tetragonorum efficiunt senariam medietatem. Nam quaternarii tetragoni latus binarius est, novenarii ternarius. Hi ergo multiplicati senarium perfecerunt; bis enim $iiij$ senarius est. Et quotienscunque datis duobus tetragonis eorum medietatem volumus invenire, latera eorum multiplicanda sunt, et qui ex his procreabitur, medietas est. Si autem cybi sunt, ut $viiij$ et $xxvij$, duae tantum inter hos eadem proportione medietates constitui queunt, xij scilicet et $xviiij$. Namque xij ad $viiij$ et $xviiij$ ad xij et $xxvij$ ad $xviiij$ sesquialtera tantum proportione iunguntur. In his quoque eadem laterum ratio est. Namque ex uno cybo, qui propinquior est, una medietas duo latera colligit, ex alternatim vero posito unum. In alia quoque medietate idem est. Ponanturenim duo cybi et in medio eorum duae medietates, quas superius diximus: $viiij$ xij $xviiij$ $xxvij$. Octonarii igitur latus est binarius; bis enim bini bis octonarium referunt: ternarius vero $xxvij$ cybi latus est; ter enim tres ter $xxvij$ restituunt. Medietas igitur, quae iuxta octonarium est, id est xij , mutuatur duo latera ex propinquo sibi octonario et aliud unum latus ex altrinsecus posito $xxvij$ cybo. Bis enim bini ter xij pandunt. Et $xviiij$ eadem ratione duo latera a propinquo sibi $xxvij$ cybo colligit et unum ab altrinsecus posito octonario. Tres enim ter bis $xviiij$ concludunt. Hoc autem universaliter speculandum est. Si tetragonus tetragonum multiplicet, sine dubio tetragonus provenit; sin vero parte altera longior tetragonum multiplicet vel tetragonus parte altera longiorem nunquam tetragonus, semper parte altera longior crescit. Rursus si cybus cybum multiplicaverit, cybi forma conficitur, si vero parte altera longior cybum vel cybus parte altera longiorem, nunquam cybus procreabitur. Hoc scilicet secundum similitudinem paris atque imparis. Par enim parem si multiplicet, semper par nascitur et impar inparem si multiplicet, impar continuo procreabitur. Si vero impar parem vel si par inparem multiplicet, par semper exoritur. Hoc autem facilius cognoscitur ex lectione Platonis in libris de republica eo loco, qui nuptialis dicitur, quem ex persona musarum philosophus introducit. Sed nunc ad tertiam medietatem redeundum est.

De armonica medietate eiusque proprietatibus

Armonica autem medietas est, quae neque eisdem differentiis nec aequis proportionibus constituitur, sed illa, in qua quemadmodum maximus terminus ad parvissimum terminum ponitur, sic differentia maximi et medii contra differentiam medii atque parvissimi comparatur; ut si sint $iiij$ $iiiij$ vj vel si ij $iiij$ vj . Senarius enim quaternarium sua tertia parte superat, id est duobus, quaternarium vero ternarium sua quartaparte supervenit, id est uno, et senarius ternarium sua medietate, id est tribus, ternarius vero binarium sua parte tertia, id est unitate transcendit. Quare in his neque eadem proportio terminorum est, neque sunt eadem differentiae, est autem quemadmodum maximus terminus ad parvissimum terminum, sic differentia maximi et medii ad differentiam medii atque postremi. Namque in hac proportione, quae est $iiij$ $iiiij$ vj , maior terminus, id est senarius, ad parvissimum terminum, id est ternarium, duplus est et differentia maximi et medii, id est senarii et quaternarii, duo scilicet, ad differentiam medii et ultimi, id est quaternarii atque ternarii, quae est unitas, dupla perspicitur. Sed hoc quoque subiecta descriptione monstratur.

Differentiae duplae Differentiae triplae

j ij

ij iij j j ij j

Termini dupli Termini tripli

Habet autem proprietatem, quemadmodum dictum est, contrariam arithmeticae medietati. In illa enim in minoribus terminis maior erat proportio, in maioribus minor. In hac vero in maioribus quidem terminis maior est proportio, in minoribus vero minor. Namque in hac dispositione iij iij vj tres ad quattuor comparati sesquiterciam habitudinem, sex vero ad quattuor, sesquialteram reddunt. Sed maior est proportio sesquialtera a sesquitercia tantum, quantum pars tertia medietate transcenditur. Iuste igitur medietas quaedam geometrica proprieque esse proportionalitas iudicatur, scilicet inter eam, ubi in maioribus terminis minor est proportio et in minoribus maior, et inter eam, ubi in maioribus maior est, in minoribus minor. Illa est enim vere proportionalitas, quae medietatis quodammodo locum obtinens et in maioribus et in minoribus aequalibus proportionum comparationibus continetur. Hoc quoque signum est duarum extremitatum mediam esse quodammodo geometricam proportionem. Namque in arithmetica proportione medius terminus eadem sua parte et minorem praecedit et a maiore praeceditur, sed alia parte minoris, alia vero parte maioris. Sit enim arithmetica dispositio ij iij iij. Ternarius igitur numerus binarium tertia sua parte praecedit, id est uno, et a quaternario tertia sua parte praeceditur, id est uno. At vero ternarius non eadem parte minoris minorem vincit vel maioris a maiore superatur. Namque minorem, id est binarium, uno superat, id est ipsius medietate binarii, a quaternario vero uno relinquitor, quae pars quaternarii quarta est. Recte igitur dictum est, medium terminum in huiusmodi medietate eadem sui parte et minorem vincere et a maiore superari, sed non eisdem partibus vel minoris minorem transgredi vel maioris a maiore transcendere. Contrarie armonica medietas proportionem habet. Namque non eadem parte sua medius terminus in hac proportione vel minorem vincit vel a maiore superatur, sed eadem parte minoris minorem superat, qua parte maioris a maiore superatur. In hac enim dispositione armonica, quae est ij iij vj ternarius binarium tertia sui parte vincit, idem ternarius a senario tota sui quantitate superatur, id est tribus, idemque ipse ternarius medietate minoris vincit minorem, id est uno, et medietate maioris a maiore termino vincitur, id est tribus. Senarii enim medietas ternarius est. In geometrica vero medietate neque eisdem suis partibus medius vel vincit minorem vel a maiore vincitur, neque eadem parte vel minoris minorem superat vel maioris a maiore relinquitor, sed qua parte sua medius terminus minorem superat, eadem parte sua maior terminus medium vincit, quod est ut medietas atque extremitas aequalibus medietatem et extremitatem reliquam suis partibus supervadant. In hac enim dispositione, quae est iij vj viij tertia sui parte medius senarius quaternarium superat, id est duobus, et tertia sui parte rursus novenarius senarium vincit, id est tribus. Habet autem aliam proprietatem armonica medietas, ut cum duas extremitates in unum redactas medietas multiplicaverit, dupla quantitas colligatur, quam si se multiplicent duae extremitates. Sint enim hi termini: iij iij vj. Si igitur ternarium et senarium iungas, novenarium facies, qui per quaternarium ductus xxxvj efficit. Quod si se ipsae extremitates multiplicent et fiant tres sexies, xvij conficiunt, quod est prioris summae dimidium.

viij

xxvj

ij iij j

iiij

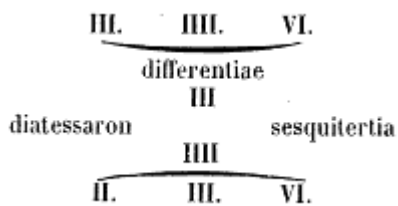
Quare dicta sit armonica medietas ea, quae digesta est

Considerandum forsitan videatur, cur hanc arithmetica medietatem vocemus. Cuius haec ratio est, quoniam arithmetica dispositio aequas tantum per differentias dividit quantitates, geometrica vero terminos aequa proportione coniungit, at vero armonica ad aliquid quodammodo relata consideratione neque solum in terminis speculationem proportionis habet neque solum in differentiis, sed in utrisque communiter. Quaerit enim, ut quemadmodum sunt ad se extremi termini, sic maioris ad medium differentia contra differentiam medietatis ad ultimum. Ad aliquid autem considerationem armonicae proprie esse, in primi libri rerum omnium divisione

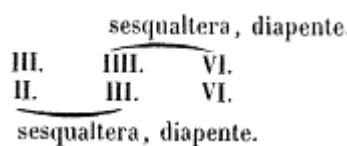
monstravimus. Ipsarum quoque musicarum consonantiarum, quas symphonias nominant, proportiones in hac paene sola medietate frequenter invenies. Namque symphonia diatessaron, quae princeps est et quodammodo vim obtinens elementi,—constituitur scilicet in epitrita proportione, ut est quaternarius ad ternarium—in eiusmodi armonicis medietatibus invenitur. Sint enim eiusmodi armonicae medietatis termini, quorum extremi dupli sint, et rursus alia huiusmodi dispositio, quorum extremi tripli.

$ij \quad iij \quad vj \quad ij \quad iij \quad vj$

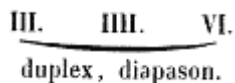
Senarius igitur ad ternarium duplus est, idem autem senarius in alia dispositione ad binarium triplus. Horum igitur si differentias colligamus et ad se invicem comparemus, epitrita proportio colligetur, unde diatessaron symphonia resonabit. Inter ij enim et vj ternarius est et inter binarium et senarium quaternarius, qui sibimet comparati sesquiterciam efficient proportionem.



In eadem quoque medietate et diapente symphonia componitur, quam sesquialtera habitudo restituit. Nam in utrisque dispositionibus his, quae subiectae sunt, in duplici senarius ad quaternarium sesquialter est et in triplici ternarius ad binarium. Ex quibus utrisque diapente symphonia coniungitur



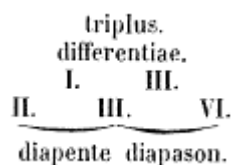
Post hanc autem diapason consonantia, quae fit ex duplici, ut est subiecta formula.



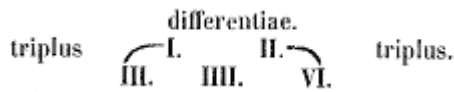
In triplici quoque dispositione simul diapente et diapason symphonia componitur servans sesquialteram et duplicem rationem, quod subiecta descriptio docet.



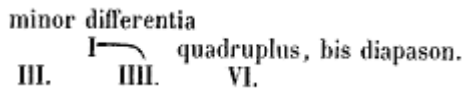
Et quoniam triplus duas continet consonantias, diapente scilicet et diapason, in huius triplicis dispositione in differentiis eundem rursus triplum reperiemus, secundum subter descriptum modum.



In dupla vero dispositione maior terminus ad medii termini contra se differentiam triplus est et rursus minor terminus ad medii contra minorem terminum comparati differentiam triplus est.



Illa autem maxima symphonia, quae vocatur bis diapason velut bis duplum, quoniam diapason symphonia ex duplici proportione colligitur, huic se iuncturae armonicae medietatis interserit. Nam in duplici proportione medius terminus ad minoris suique differentiam quadruplus invenitur.



In triplicibus quoque extremitatibus maior differentia ad minorem differentiam quadrupla est et bis diapason symphoniam emittit. Namque in dispositione ij iij vj extremorum differentia est, id est senarii et binarii, iij; minor vero differentia, id est ternarii et binarii, unus iij autem uno quadrupla maior est relatione, quae comparatio bis diapason consonantiam tenet.

De geometrica armonia

Vocant autem quidam armonicam huiusmodi medietatem idcirco, quod semper haec proportionalitas geometricae armoniae cognata est. Armoniam autem geometricam cybum dicunt. Ita enim ex longitudine in latitudinem distentus est et in altitudinis cumulum crevit, ut ex aequalibus proficiscens ad aequalia perveniens aequaliter totus sibi conveniens creverit. Haec autem medietas in omnibus cybis, quae est geometrica armonia, perspicitur. Omnis enim cybus habet latera xij angulos viij superficies vj. Hic autem ordo et dispositio armonica est. Disponantur enim vj viij xij. Hic ergo quemadmodum est maior terminus ad parvissimum, ita differentia maioris et medii ad medii ac parvissimi comparatur. Perpensi namque xij ad vj dupli sunt, differentia vero duodenarii et octonarii quaternarius est, octonarii vero et senarii duo. Dupla autem ratione distabunt duobus quattuor comparati. Rursus octonarius, qui medietas est, alia sua parte minorem praecedit et alia sua parte a maiore praeceditur. Eadem autem parte minoris minorem superat, qua parte maioris a maiore superatur. Rursus si extremitates in unum redigantur et a medietate octonario multiplicentur, duplus erit ab eo numero, quem solae extremitates multiplicatae perfecerint.

Omnes autem in hac dispositione symphonias musicas invenimus. Diatessaron quidem est viij ad vj, quoniam proportio sesquitercia est, at diapente xij ad viij, quoniam, quae sesquialtera comparatio dicitur, in ea diapente consonantia repperitur. Diapason vero quae ex duplici nascitur, ex xij ad vj compositione producitur. Diapason vero et diapente, quae triplicis obtinent rationem, fit ab extremitatum differentia ad differentiam minorem. Namque duodenarii et senarii vj differentia est, minor vero est differentia octonarii et senarii, id est ij; qui senarius ad binaria triplus est, et diapason simul et diapente consonantiam sonant. Illa vero maior consonantia, quae est bis diapason, quae ex quadruplo fit, in medii termini, id est octonarii, et eius differentiae comparatione perspicitur, quae inter octonarium senariumque repperitur. Quare proprie atque convenienter huiusmodi proportionalitas armonica medietas appellatur.

Quemadmodum constitutis altrinsecus duobus terminis arithmetica, geometrica et armonica inter eos medietas alternetur: in quo de eorum generationibus

Nos autem praestare debemus quatenus, quemadmodum dato calamo extremis foraminibus manentibus musicis mos est, ut medium foramen permutantes atque alios aperientes alios digitis ocludentes diversos emittant sonos, vel cum duabus altrinsecus protensis chordis medii nervi sonum musicus vel adstringendo tenuat vel remittendo gravat: ita quoque datis duobus numeris nunc quidem arithmetica nunc vero geometrica nunc autem armonicam medietatem experiamur inserere, ut rectum propriumque medietatis nomen sit, quod manentibus extremitatibus huc atque illuc ferri permutarique videatur. Poterimus autem hanc in duobus

altrinsecus positis terminis vel paribus vel imparibus permutare ita, ut, cum arithmetica ponimus medietatem, differentiarum tantum ratio aequalitasque servetur, cum vero geometricam, rata se proportionum iunctura custodiat, sin autem armonica fiat, differentiarum comparatio ab terminorum proportione non discrepet. Et sint quidem primo pares positae quaedam extremitates, inter quas has omnes medietates oporteat internectere, x et xl. Prius igitur arithmetica medietas aptetur. Inter hos ergo si xxv posuero, erit mihi arithmetica proportio differentiarum quantitate inmutabiliter custodita, in huiusmodi scilicet dispositione: x xxv xl. Vides enim, ut quindena sese summulae quantitate transcendant; omnesque proprietates, quas supra diximus in medietate arithmetica convenire, ab hac huiusmodi dispositione non repperies alienas. Namque quemadmodum unusquisque eorum terminus ad se ipsum est, quoniam sibi aequalis est, ita sunt ad se invicem differentiae, quoniam sibi sunt aequales; et quanto maior terminus medium transit, tanto medias vincit minorem; et extremitatum adgregatio duplex est medietate; et minorum terminorum proportio maior est illa comparatione, quae inter maiores terminos continetur; et tanto minor est numerus, qui fit ex multiplicatis extremitatibus, ab eo, qui fit ex multiplicata medietate, quantum eorum differentiae multiplicatae restituunt; illud quoque quod medietas eadem sui parte et a maiore vincitur et minorem ipsa supervenit, non eadem autem parte minoris minorem transit vel maioris a maiore relinquitur. Quae omnes scilicet proprietates non alterius nisi arithmeticae medietatis sunt, quod, si superius dicta meminerit lector, ita esse indubitanter intellet.

Rursus si inter eosdem x et xl xx constituam, statim geometrica medietas cum suis proprietatibus cunctis exoritur, arithmetica medietate pereunte. In hac enim dispositione x xx xl quemadmodum est maior ad medium, sic medius ad extremum; et quod continetur ab extremitatibus, aequum est ei, quod a multiplici medietate completur. Differentiae quoque eorum in eadem sunt proportione qua termini. Crementum vero et inminutio proportionum secundum terminos nulla est, sed maiorum terminorum proportio a minorum terminorum proportione non discrepat.

Si vero armonicam medietatem coniungere velim, xvj mihi numerus inter extremitates utrasque ponendus est, ut sit hoc modo: x xvj xl. Nunc igitur licet in huiusmodi dispositione omnes armonicis proprietates agnoscere. Qua enim maximus ad parvissimum terminus proportione coniungitur, eadem proportione differentiae ad se invicem comparantur. Et quibus partibus maioris a maiore medius vincitur, eisdem partibus minoris praerit minorem; suis vero non eisdem vel a maiore vincitur vel transit minorem; et in maioribus terminis maior est proportio, in minoribus minor; et si in unum extremitates redigantur et medietatis quantitate concrecant, duplus inde conficitur numerus ab eo, qui ex solis multiplicatis extremitatibus procreatur.

Atque hoc quidem in terminis paribus constitutum est. At vero si impares proponantur, ut sunt v et xlv aptatus medius xxv arithmeticae proportionem medietatemque constituet. Nam si sint v xxv xlv eadem sese numerorum quantitate termini transgredientur. Et omnis superius dicta proprietas arithmeticae medietatis in his terminis custoditur. Sed si xv numerum medium ponam, ut sint v xv xlv, in geometricam medietatem termini relabuntur aequalibus terminorum ad se invicem proportionibus custoditis. VIII vero si inter utrosque terminos ponam, ut sint v viij xlv, fit armonica medietas, ut qua summa maximus numerus parvissimum praecedat, eadem maior differentia minorem differentiam vincat.

Qua vero disciplina huiusmodi medietates repperire possimus expediendum est. Datis duobus terminis si arithmetica medietatem constituere oportebit, utraque est extremitas coniungenda quodque ex ea copulatione colligitur dividendum, isque numerus, qui ex divisione redactus est, arithmetica medietatem inter extremitates locatus efficiet; ut x et xl si iunxero, efficiunt l, quos si dividam, xxv redduntur. Hic erit medius terminus secundum arithmeticae proportionem. Vel si illum numerum, quo maior minorem superat, divides eumque minori superponas quodque inde concrecit medium ponas, arithmetica medietas informatur. Nam xl denarium tricenario superat, quem si divides xv fiunt. Hunc si minori, id est denario, superposueris xx et v nascentur. Quem si medium constituas, arithmeticae medietatis ordo formatur. Geometricam vero si rationem vestiges, eius numeri, qui sub utrisque extremitatibus continetur, tetragonum latus inquire, et hunc medium pone. Nam sub xl et denario numero cccc continentur. Si enim denarium in xl multiplices, hic numerus crescit. Horum igitur quadringentorum require tetragonum latus. Hi sunt xx Vicies enim xx cccc efficiunt. Repertum ergo latus quadratum medium constituas. Vel si eam proportionem, quam inter se dati termini custodiunt, divides et id quod relinquitur medium terminum ponas. Namque xl ad denarium quadruplus est. Igitur quadruplum si divides, duplum facies, qui est scilicet xx. Nam xx ad denarium duplus est. Hunc si medium constituas, medietatem geometricam perferet. Armonicam vero medietatem tali modo repperies. Differentiam terminorum in minorem

terminum multiplica et post iunge terminos, et iuxta eum, qui inde confectus est, committe illum numerum, qui ex differentiis et termino minore productus est, cuius cum latitudinem inveneris, addis eam minori termino, et quod exinde colligitur, medium terminum pones. X enim et xl faciunt l. Differentia autem inter x et xl. xxx sunt, quem si multiplices in denarium, id est in minorem, decies xxx oportet ccc efficias. Quos ccc iuxta eum committe, qui ex iunctis utrisque confectus est, id est iuxta l. Facient enim quinquages senos. Et invenitur latitudo senarius. Hunc igitur si minori termino addas, facient xvj et hic numerus medius constitutus inter x et xl armonicam proportionem medietatemque servabit.

De tribus medietatibus, quae aronicae et geometricae contrariae sunt

Haec quidem sunt apud antiquiores inventae probataeque medietates, quas idcirco longius enodatusque tractavimus, quod haec maxime in antiquorum lectionibus inveniuntur, et ad omnem paene vim cognitionis eorum versatur utilitas. Ceteras autem praetereundo transcurramus idcirco, quoniam non multum nobis in lectionibus prosunt, sed tantum ad implendam denarii numeri quantitatem. Quae ne lateant neve sint aliquibus ignorata, depromimus. Videntur enim haec supra dictis medietatibus esse contrariae, ex quibus originem trahunt. Ex his enim etiam istae sunt constitutae. Est autem quarta medietas, quae opposita videtur aronicae. In qua tribus terminis positus, quemadmodum est maximus terminus ad parvissimum, sic differentia minorum ad differentiam maximorum, ut sunt iij v vj. Sex ad ternarium duplus est, et sunt minores termini v et iij, maximi vero huius dispositionis vj et v. Differentia vero minorum, quinarum scilicet et ternarum, ij sunt, maiorum, quinarum et senarum, j. Qui ij ad j comparati duplum faciunt. Ergo quemadmodum est maximus terminus ad parvissimum, sic minorum terminorum differentia est ad differentiam maximorum. Liqueat autem oppositam et quodammodo contrariam esse hanc medietatem aronicae medietati idcirco, quod in illa quemadmodum est maximus terminus ad parvissimum, sic terminorum maiorum differentia ad differentiam minorum, hic autem e contrario. Est autem propria huius medietatis, quoniam quod continetur sub maximo termino et medio duplum est eo, quod continetur sub medio atque parvissimo. Sexies enim quinque xxx sunt, quinquies vero tres xv.

Duae vero aliae medietates, quinta scilicet et sexta geometricae medietati contrariae sunt et eidem videntur oppositae. Est autem quinta medietas, quotiens in tribus terminis quemadmodum est medius terminus ad minorem terminum, ita eorum differentia ad differentiam medii atque maioris. Nam in hac dispositione ij iij v quaternarius ad binarium duplus est. Sed inter quaternarium et binarium ij sunt, inter quaternarium vero et maiorem terminum, id est quinque, j. Et ij ad j dupli sunt. Contrarium autem geometricae medietati in hac proportione est, quod in illa quemadmodum maior terminus ad minorem est, sic maiorum differentia ad differentiam minorum; hic vero contrarie, quemadmodum minores ad se termini sunt, sic minorum differentia terminorum ad maiorum differentiam comparatur. Est autem proprium in hac quoque dispositione, quod illud, quod continetur sub maiore termino et medietate duplum est eo, quod sub utrisque extremitatibus continetur. Nam quinquies iij sunt xx, quinquies vero ij sunt x. Et xx denarii duplus est.

Sexta vero medietas est, quando tribus terminis constitutis quemadmodum est maior terminus ad medium, sic minorum terminorum differentia ad differentiam maximorum. In dispositione enim, quae est j iij vj, maximus terminus ad medium sesquialter est, differentia vero minorum, id est unius et iij ternarius est, maiorum vero, id est quaternarii et senarii, binarius. Ternarius autem binario comparatus sesquialteram habitudinem proportionis efficit. Eodem autem modo haec quoque medietas geometricae contraria est, quemadmodum et quinta, propter proportionem differentiarum a minoribus ad maiores terminos conversam.

De quattuor medietatibus, quas posteri ad implendum denarium limitem adiecerunt

Et haec quidem sunt sex medietates, quarum tres usque a Pythagora ad Platonem Aristotelemque manserunt. Post vero, qui insecuti sunt, has tres alias, de quibus supra disseruimus, suis commentariis addiderunt. Sequens autem aetas, quemadmodum diximus, ad implendam denariam quantitatem alias quattuor medietates apposuit, quas non adeo quis in veterum libris inveniatur. Has igitur nos quam possumus brevissime disponamus. Prima enim quae est earum, in ordine vero septima medietas, hoc modo coniungitur, cum in tribus terminis quemadmodum est maximus terminus ad ultimum, sic maximi et parvissimi termini differentia ad minorum differentiam terminorum, ut in hac dispositione: vj viij viij. Novenarius igitur ad senarium sesquialter est, quorum est differentia ternarius, minorum vero terminorum, id est octonarii et senarii binarius differentia est, qui ad superiorem ternarium comparatus facit sesquialteram proportionem. Secunda vero inter quattuor, sed octava in

ordine proportionalitas est, quotiens in tribus terminis quemadmodum sunt extremitates ad se invicem comparatae, sic eorum differentia ad maiorum terminorum differentiam, ut sunt vj vij viij. Novem igitur ad vj sesquialter est. Et eorum differentia ternarius est, qui comparatus contra maiorum differentiam, id est septenarii et novenarii, qui binarius est, reddit sesquialteram proportionem. Tertia vero inter has sequentes quattuor, nona autem in ordine proportio est, quando tribus terminis positus quam proportionem medius terminus ad parvissimum custodit, eam retinet extremorum differentia ad minorum differentiam comparata, ut iiij vj vij. Etenim vj ad iiij sesquialter est, quorum est differentia binarius. Septenarii vero et quaternarii ternarius differentia est, quem si ad superiorem binarium comparemus, sesquialtera proportione coniungitur. Quarta vero, quae in ordine decima est, consideratur in tribus terminis, cum tali proportione medius terminus ad parvissimum comparatur, quali extremorum differentia contra maiorum terminorum differentiam proportione coniungitur, ut sunt iij v viij. Quinarius enim medius terminus ad ternarium superbipartiens est; extremorum vero differentia, octonarii scilicet et ternarii, quinarius est, qui comparatus contra maiorum terminorum differentiam, scilicet quinarii et octonarii, qui est ternarius, et ipse quoque superbipartiens invenitur.

Dispositio decem medietatum

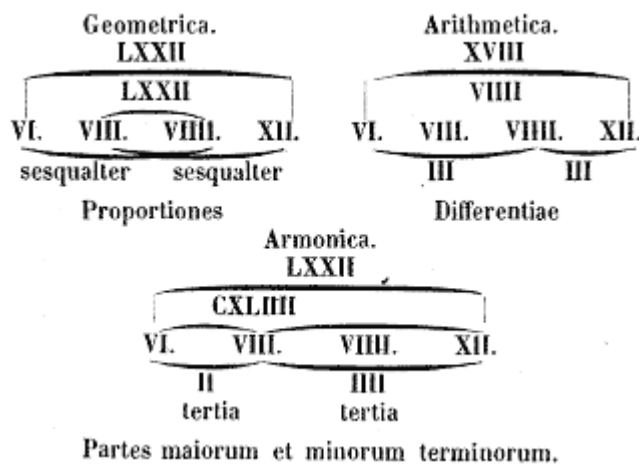
Disponamus igitur cunctas medietates in ordinem, ut, cuiusmodi omnes sint, facillime possit intellegi.

Arithmetica		P			
	rima		j	ij	
Geometrica		S			
	ecunda		j	ij	
Armonica		te			
	rtia		ij	ij	j
Contraria		q			
armonicae	uarta		ij		j
Contraria		q			
geometricae	uinta		j	ij	
Contraria		s			
geometricae	exta		ij	j	
Inter iiij prima		S			
	eptima		j	ij	ij
Inter	iiij		o		
secunda	ctava		j	ij	ij
Inter iiij tertia		n			
	ona		ij	j	ij
Inter iiij quarta		d			
	ecima		ij	ij	

De maxima et perfecta symphonia, quae tribus distenditur intervallis

Restat ergo de maxima perfectaue armonia disserere, quae tribus intervallis constituta magnam vim obtinet in musici modulaminis temperamentis et in speculatione naturalium quaestionum. Etenim perfectius huiusmodi medietate nihil poterit inveniri, quae tribus intervallis producta perfectissimi corporis naturam substantiamque sortita est. Hoc enim modo cybum quoque trina demensione crassatum plenam armoniam esse demonstravimus. Haec autem huiusmodi invenietur, si duobus terminis constitutis, qui ipsi tribus creverint intervallis, longitudine latitudine et profunditate, duo huiusmodi termini medii fuerint constituti et ipsi tribus intervallis notati, qui vel ab aequalibus per aequales aequaliter sint producti vel ab inaequalibus ad inaequalia inaequaliter, vel ab inaequalibus ad aequalia aequaliter, vel quolibet alio modo, atque ita, cum armonicam proportionem custodiant alio tamen modo comparati faciant arithmeticam medietatem hisque geometrica medietas, quae inter utrasque versatur, deesse non possit. In quattuor enim terminis si fuerit quemadmodum primus ad tertium sic secundus ad quartum, proportionum ratione scilicet custodita, geometrica medietas

explicatur, et quod continetur sub extremitatibus, aequum erit ei, quod sub utraque medietate ad se invicem multiplicata conficitur. Rursus si maximus *iiij* terminorum numerus ad eum, qui sibi propinquus erit, talem habeat differentiam, qualem idem ipse maximo propinquus ad parvissimum, huiusmodi proportio in arithmetica consideratione proponitur, et extremorum coniunctio duplex erit propria medietate. Si vero inter *iiij* qui est tertius terminus aequa parte quarti quartum terminum superet et aequa primi a primo superetur, arithmetica huiusmodi proportio medietasque perspicitur, et quod continetur sub extremorum adgregatione et multiplicatione medietatis duplex est eo, quod sub utraque extremitate conficitur. Sit autem quoddam huius dispositionis exemplar hoc modo *vj viij viii xij*. Has igitur omnes solidas quantitates esse non dubium est. Sex enim nascuntur ex uno bis ter, *xij* autem ex bis duo ter, horum autem medietates octonarius fit semel duo quater, novenarius vero semel tres ter. Omnes igitur termini cognati sibi et tribus intervallorum demensionibus notati sunt. In his igitur geometrica proportionalitas invenitur, si *xij* ad *viij* vel *viij* ad *vj* comparemus. Utraque enim comparatio sesquialtera proportio est, et quod continetur sub extremitatibus, idem est ei, quod fit ex mediis. Nam quod fit ex duodecies sex, aequum est ei, quod fit ex octies *viij*. Geometrica ergo proportio est huiusmodi. Arithmetica autem est, si duodenarius ad novenarium et novenarius ad senarium comparetur. In utrisque enim ternarius differentia est et iunctae extremitates medietate duplae sunt. Si enim iunxeris senarium et *xij*, facies *xviiij*, qui est novenario, medio termino, duplus. In his ergo geometricam arithmeticaque medietatem perspeximus. Hic quoque arithmetica medietas invenitur, si *xij* ad *viij* et rursus *viij* ad senarium comparemus. Qua enim parte senarii octonarius senarium superat, id est parte tertia, eadem duodenarii parte octonarius superatur. Quattuor enim, quibus octonarius a duodenario vincitur, duodenarii tertia pars est. Et si extremitates iungas *vj* scilicet et *xij* easque per octonarium medium multiplices, *cxliiij* sunt. Quod si se extremitates multiplicent, *vj* scilicet et *xij*, facient *lxxij*, quo numero *cxliiij* duplus est. Inveniemus hic quoque omnes musicas consonantias. Namque *viij* ad *vj* et *xiiij* ad *xij* comparati sesquiterciam proportionem reddunt, et simul diatessaron consonantiam; *vj* vero ad *viij* vel *viij* ad *xij* comparati reddunt proportionem sesquialteram, sed diapente efficiunt symphoniam; *xij* vero ad senarium considerati duplicem quidem proportionem, sed diapason symphoniam canunt; *viij* vero et *viij* ipsi contra se medii considerati epogdoun iungunt, qui in musico modulamine tonus vocatur, quae omnium musicorum sonorum mensura communis est. Omnium enim est sonus iste parvissimus. Unde notum est, quod inter diatessaron et diapente consonantiarum tonus differentia est, sicut inter sesquiterciam et sesquialteram proportionem sola est epogdous differentia. Huius descriptionis subter exemplar adiecimus.



Consonantiae.			
dupla, diapason.			
sesquitertia	epogdous, tonus		sesquitertia
diatessaron			diatessaron
VI.	VIII.	VIII.	XII.
sesquialter, diapente.		sesquialter, diapente	
Proportiones et consonantiae.			

EXPLICIT LIBRI ARITHMETICORUM